経路積分と量子電磁力学

Path Integrals and Quantum Electrodynamics

杉田勝実・岡本良夫・関根松夫

共　著

森北出版株式会社

まえがき

経路積分は量子電磁力学 (QED)，電弱理論，量子色力学 (QCD) などの素粒子論の他に統計力学，物性理論などにも十分応用できる．本書は，著者の一人が現在東京工業大学で講義している「量子電磁気学」の中で教科書として用いた際，経路積分形式で明快な議論ができるようにとの意図で企画されたので，題材の厳選，論理の枠組みの明確化が一つの特徴となっている．

また，著者自らの学習過程を振り返って，「こんな教科書があれば悩まなくとも済んだのに」と思えるような本を目指した．実際，一人で学習しているときに，1ページの中に2，3個所疑問点があったりすると，なかなか読み進めることができず，ストレスばかりが鬱積してしまうことがある．この本では決してこのようなことがないように，論理性，首尾一貫性を重要視し，一歩ずつ歩んでいけば必ず読破できるようにした．

本書は理工学部の高学年の講義に使用できることはもちろん，非常に少ない予備知識でもって，独力で読み進めることができる．従って，これまでに出版されている経路積分の本とは詳細構成が異なっている．例えば，経路積分による量子化では全ての物理量はWeyl変換によって可換な量となり，物理量をオペレータとして扱う正準量子化に比べて古典論との対応が明確なので，本書ではこの対応関係に留意しながら解説を加え，読者の理解に資するように努めた．また，普通天下り的に簡単に説明されているGrassmann数についても，まったくの予備知識なしの状態からbuild upし，Grassmann代数を経由して，論理的飛躍なしにその特質を説明した．これを用いたFermi系の古典論や量子論についても，十分な説明を与えた．また，電磁場に代表されるゲージ場を扱う際には，拘束系に関する知識が不可欠であるにも関わらず，拘束系の正準形式を詳述した教科書は少ない．拘束系の解説に多くの紙数を費やしたのはそのためである．簡単な例題で基本的な概念を把握し，その後に一般論を展開するというスタイルで議論を進めており，初学者でも無理なく理解できるように努めた．

前半部で述べた経路積分を連続無限自由度にまで拡張し，場の理論における経路積分の説明を行った後，一応完成された量子電磁力学に応用した．そこでも面倒な計算を省略したりせず，プロセスを重んじ丁寧に記述した．経路積分形式を用いて摂動論

の基本式を導き，それを種々の例に適用して，Green 関数，Feynman ダイアグラムへと到る．こういうプロセスを採ることにより，論理の筋道がすっきりし，理解しやすくなったと思われる．更に，発散積分の計算方法，繰り込みの手法についても，具体例を用いて詳しく解説した．

章末にはいくつかの演習問題を設けると共にその解答を示し，読者の理解が深まるよう配慮した．経路積分や量子電磁力学は実際に計算を行ってみて初めて体得できるものなので，読者は本書をただ読むのではなく，手を動かして式を追い，考えながら問題を解くことによって理解を深めて頂きたい．そして経路積分の美しさを実感されると共に，そこで学んだ内容や考え方を将来に役立てていただければ著者の望外の幸せである．

最後に，出版のお世話を頂いた水垣偉三夫氏を始めとする森北出版の方々に厚く御礼申し上げる．

1998 年 5 月

杉田勝実
岡本良夫
関根松夫

目　　次

第1章 量子力学の基礎知識

本章では経路積分を学ぶのに必要な量子力学の基礎知識について概説する．状態空間や observable，観測量の確率解釈などに代表される量子力学の基本的な概念を提示した後，正準量子化について説明する．経路積分の特徴は古典系の Hamiltonian や Lagrangian を使って量子系の時間発展が記述できる点にあり，古典系と量子系の仲介役を果たすのが Weyl 変換である．そこで，本章の後半では Weyl 変換と逆変換，Weyl 順序について詳しい解説を与える．

1−1 状態空間と observable

量子力学では全ての物理量は状態空間と呼ばれる Hilbert 空間上の線形作用素として表現される．Hilbert 空間とは内積から誘導されたノルムに関して完備なベクトル空間である[1)]．通常は，無限次元の空間を対象とするため収束性や線形作用素の有界性などに関しては特別な注意が必要となるが，それ以外の面では有限次元のベクトル空間と大差ない．

状態空間 S の元を Dirac に倣って $|a\rangle$ などと記そう．“a” は異なる元を区別するための識別子であり，必要に応じて $|u, v, \cdots\rangle$ のように複数の識別子を使う場合もある．S の二つの元 $|a\rangle$ と $|b\rangle$ の内積を $(|a\rangle, |b\rangle)$ と表現すれば，内積の性質から

$$(|a\rangle, |b\rangle) = (|b\rangle, |a\rangle)^* \qquad (1-1a)$$

$$(|a_1\rangle + |a_2\rangle, |b\rangle) = (|a_1\rangle, |b\rangle) + (|a_2\rangle, |b\rangle)$$
$$(|a\rangle, |b_1\rangle + |b_2\rangle) = (|a\rangle, |b_1\rangle) + (|a\rangle, |b_2\rangle) \qquad (1-1b)$$

$$(\alpha|a\rangle, |b\rangle) = \alpha^*(|a\rangle, |b\rangle), \quad (|a\rangle, \alpha|b\rangle) = \alpha(|a\rangle, |b\rangle) \qquad (1-1c)$$

$(|a\rangle, |a\rangle) \geq 0$ であり，符号が成立すれば $|a\rangle$ は零ベクトル　　(1−1d)

1) 特に断らない限り複素ベクトル空間を対象とする．

が成立する．ただし α は複素数であり，上付添字 "$*$" は複素共役を意味する．式 (1-1a) により $(|a\rangle, |a\rangle)$ は常に実数である点に注意しよう．でなければ式 (1-1d) の不等号は意味を持たない．式 (1-1d) によれば $|a\rangle$ のノルム $\||a\rangle\|$ を $(|a\rangle, |a\rangle)$ の正の平方根として定義できるが，これが上述の「内積から誘導されたノルム」である．また,「S がノルム $\|\cdot\|$ に関して完備である」とは，$\|\cdot\|$ に関する Cauchy 列が常に S 内に極限を持つことを意味する[1)]．

さて，$|a\rangle$ を固定すれば $(|a\rangle, .)$ は状態空間 S から複素数の集合 C への線形写像である．なぜなら $(|a\rangle, .)$ は S の元 $|b\rangle$ を C の元 $(|a\rangle, |b\rangle)$ に写し，線形性は式 (1-1b), (1-1c) によって保証されるからである．実は，S から C への有界な線形写像はこの形のものに限られる[2)]．つまり，φ が S から C への有界線形写像ならば，$(|a\rangle, .)$ が φ に一致するような $|a\rangle \in S$ が一意的に存在する (Riesz の表現定理[3)])．そこで，このような線形写像の集合を S^* と記し，S^* における和とスカラ倍を次のように定義する．つまり，任意の $|b\rangle \in S$ に対して

$$f(|b\rangle) = (|a_1\rangle, |b\rangle) + (|a_2\rangle, |b\rangle), \quad g(|b\rangle) = \alpha(|a\rangle, |b\rangle)$$

を満足する線形写像 f, g によって和 $(|a_1\rangle, .) + (|a_2\rangle, .)$ やスカラ倍 $\alpha(|a\rangle, .)$ を定義するのである．すると，式 (1-1b), (1-1c) から

$$(|a_1\rangle, .) + (|a_2\rangle, .) = (|a_1\rangle + |a_2\rangle, .), \quad \alpha(|a\rangle, .) = (\alpha^*|a\rangle, .) \tag{1-2}$$

が結論される．S^* はこの和とスカラ倍に関してベクトル空間になっており[4)]，S の双対空間と呼ばれる．

古典的な物理量を F とするとき，これに対応する S 上の線形作用素を $\widehat{F}$ と記そう．また，古典的な対応物がない場合でも線形作用素には "$\widehat{\ }$" を付けて $\widehat{A}$ のように表す．$\widehat{F}$ が $|a\rangle$ に作用すれば大きさが $\||a\rangle\|$ から $\|\widehat{F}|a\rangle\|$ に変わるが，その倍率が有限の場合，つまり零ベクトル以外の任意の $|a\rangle$ に対して $\|\widehat{F}|a\rangle\|/\||a\rangle\| < G$ を満足する正数 G が存在する場合，$\widehat{F}$ は有界であると言われる．$\widehat{F}$ が有界ならば S の元 $|b\rangle$ を C の元 $(|a\rangle, \widehat{F}|b\rangle)$ に写す写像 $(|a\rangle, \widehat{F}.)$ は有界な線形写像であり，従って $(|a\rangle, \widehat{F}.) = (|a'\rangle, .)$ となるような $|a'\rangle$ が一意的に存在する．つまり，任意の $|a\rangle$ に対

1) ベクトルの列 $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \cdots$ が Cauchy 列であるとは「任意の正数 ε に対して整数 N が存在し，N より大きな m, n に対して $\||a_m\rangle - |a_n\rangle\| < \varepsilon$ が成立する」ことを意味する．
2) S から C への線形写像 φ は，零ベクトル以外の任意の $|a\rangle \in S$ に対して $|\varphi(|a\rangle)|/\||a\rangle\| < G$ を満足する正数 G が存在する場合には「有界である」と言われる．$\||a\rangle\|$ はベクトル $|a\rangle$ の大きさであり，$|\varphi(|a\rangle)|$ は複素数 $\varphi(|a\rangle)$ の大きさだから，両者の比 $|\varphi(|a\rangle)|/\||a\rangle\|$ は φ による大きさの拡大率である．
3) 例えば，藤田宏：『関数解析』(岩波講座応用数学)，岩波書店 (1995)，114 ページ．
4) 和とスカラ倍がベクトル空間の公理を満足することを示せばよい．

して $|a'\rangle$ が一意的に決まるので，$|a\rangle$ を $|a'\rangle$ に写す写像が定義できる．この写像を $\widehat{F}$ の共役作用素と呼び，$\widehat{F}^\dagger$ と記す．すると任意の $|a\rangle, |b\rangle \in S$ に対して

$$(|a\rangle, \widehat{F}|b\rangle) = (\widehat{F}^\dagger|a\rangle, |b\rangle) \qquad (1-3)$$

が成立することになる．例えば，$\widehat{F}$ が恒等写像 $\widehat{I}$ のスカラ倍 $(\widehat{F} = \alpha\widehat{I})$ の場合には $(\alpha\widehat{I})^\dagger = \alpha^*\widehat{I}$ である[1]．ところが量子論では有界な線形作用素だけで済ませるわけには行かない．古典論で最も基本となる正準変数 q, p に対応する作用素 $\widehat{q}, \widehat{p}$ でさえ有界ではないからである[2]．$\widehat{F}$ が非有界なら $(|a\rangle, \widehat{F}.)$ は非有界な線形写像であって Riesz の表現定理は適用できず，従って $(|a\rangle, \widehat{F}.) = (|a'\rangle.,)$ となるような $|a'\rangle$ は存在しない．また，$\widehat{F}$ の定義域 D_F ($\widehat{F}|a\rangle$ が定義される $|a\rangle$ の集合) は S の一部に過ぎない．しかし，D_F に属する任意の $|a\rangle, |b\rangle$ に対して式 (*1－3*) が成立するような $\widehat{F}^\dagger$ は存在し[3]，これもまた $\widehat{F}$ の共役作用素と呼ばれる．そして，有界か否かに関らず，自身の共役作用素に等しい作用素 $(\widehat{F} = \widehat{F}^\dagger)$ は自己共役作用素，あるいは Hermite 作用素と呼ばれる．ところで，式 (*1－3*) を繰り返し適用すれば

$$\begin{aligned}(|a\rangle, \widehat{P}\widehat{Q}\cdots\widehat{S}\widehat{T}|b\rangle) &= (\widehat{P}^\dagger|a\rangle, \widehat{Q}\cdots\widehat{S}\widehat{T}|b\rangle) = \cdots \\ &= (\widehat{T}^\dagger\widehat{S}^\dagger\cdots\widehat{Q}^\dagger\widehat{P}^\dagger|a\rangle, |b\rangle)\end{aligned}$$

と変形できるので，複数の作用素の積に関して次式が成立する．

$$(\widehat{P}\widehat{Q}\cdots\widehat{S}\widehat{T})^\dagger = \widehat{T}^\dagger\widehat{S}^\dagger\cdots\widehat{Q}^\dagger\widehat{P}^\dagger \qquad (1-4)$$

以後，簡単のため $(|a\rangle, .)$ を $\langle a|$ と記し，$\langle a| \in S^*$ による $|b\rangle \in S$ の像を $\langle a|b\rangle$ と記そう．また，$\langle a|$ の右側に線形作用素を置いた場合には

$$\langle a|\widehat{F} \equiv (\widehat{F}^\dagger|a\rangle, .) \qquad (1-5)$$

と約束する．すると

$$(\langle a|\widehat{F})|b\rangle = (\widehat{F}^\dagger|a\rangle, |b\rangle) = (|a\rangle, \widehat{F}|b\rangle) = \langle a|(\widehat{F}|b\rangle)$$

が成立し，演算の順序は結果に影響しないため単に $\langle a|\widehat{F}|b\rangle$ と記すだけで十分である．そして，この記法によれば式 (*1－1*) は

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* \qquad (1-6a)$$

---

1) 実際，$(|a\rangle, \widehat{F}|b\rangle) = (|a\rangle, \alpha\widehat{I}|b\rangle) = (|a\rangle, \alpha|b\rangle) = (\alpha^*|a\rangle, |b\rangle) = (\alpha^*\widehat{I}|a\rangle, |b\rangle) = (\widehat{F}^\dagger|a\rangle, |b\rangle)$ が成立する．

2) 章末の演習問題 1 参照．

3) 例えば，藤田宏：『関数解析』（岩波講座応用数学），岩波書店 (1995)，132 ページ．

$$(\langle a_1| + \langle a_2|)|b\rangle = \langle a_1|b\rangle + \langle a_2|b\rangle$$

$$\langle a|(|b_1\rangle + |b_2\rangle) = \langle a|b_1\rangle + \langle a|b_2\rangle \tag{1-6b}$$

$$(\langle a|\alpha^*)|b\rangle = \alpha^*\langle a|b\rangle, \quad \langle a|(\alpha|b\rangle) = \alpha\langle a|b\rangle \tag{1-6c}$$

$\langle a|a\rangle \geq 0$ であり，等号が成立すれば $|a\rangle$ は零ベクトル　(1-6d)

と表現できる．ただし，式 (1-6c) では α を線形作用素 $\alpha\hat{I}$ と解釈している．更に，S^* の元をブラ (bra)，S の元をケット (ket) と呼んで区別しよう．ブラ $\langle a|$ とケット $|b\rangle$ がこの順序で結合すればブラ・ケット (bra-ket) $\langle a|b\rangle$ を得るが，これは単なる複素数である．一方，$|b\rangle\langle a|$ はケット $|u\rangle$ をケット $|b\rangle\langle a|u\rangle$ に写す S 上の線形作用素である．ところで，共役演算 "$\dagger$" は作用素 $\hat{F}$ に対して定義されたのであるが，ケット $|a\rangle$ やブラ $\langle a|$ に対する共役演算を

$$|a\rangle^\dagger \equiv \langle a| = (|a\rangle, .), \quad \langle a|^\dagger \equiv |a\rangle \tag{1-7}$$

として定義し，ブラやケットが含まれていても式 (1-4) が成立すると考えると便利である．例えば，$(\hat{F}^\dagger)^\dagger = \hat{F}$ を利用すれば式 (1-4) と式 (1-7) から

$$\langle a|\hat{F} = |a\rangle^\dagger(\hat{F}^\dagger)^\dagger = (\hat{F}^\dagger|a\rangle)^\dagger = (\hat{F}^\dagger|a\rangle, .)$$

を得るが，これは式 (1-5) に他ならない．また，S 上の線形作用素 $|b\rangle\langle a|$ に対して

$$(|b\rangle\langle a|)^\dagger = \langle a|^\dagger|b\rangle^\dagger = |a\rangle\langle b|$$

を得るが，これが正しいこと，つまり任意の $|u\rangle, |v\rangle \in S$ に対して $(|u\rangle, |b\rangle\langle a|v\rangle)$ が $(|a\rangle\langle b|u\rangle, |v\rangle)$ に一致することは式 (1-1) を使って証明できる．

さて，物理量が S 上の線形作用素 $\hat{F}$ として表現されることは前述の通りであるが，系の状態はケット $|a\rangle$ によって指定される．系が $\hat{F}$ の固有ケットで指定される状態にあれば，つまり $\hat{F}|F\rangle = F|F\rangle$ を満足するケット $|F\rangle$ で指定される状態にあれば $\hat{F}$ の観測値は常に F である．しかしそれ以外の場合には系が確定した状態にあるにも関らず観測値は確定せず，観測の度毎に結果は異なる．例えば，系の状態を表すケット $|a\rangle$ が正規直交する固有ケットの組 $\{|F_n\rangle\}$ の線形結合として

$$|a\rangle = \sum_n a_n|F_n\rangle, \ \langle F_m|F_n\rangle = \delta_{mn}, \ \hat{F}|F_n\rangle = F_n|F_n\rangle \tag{1-8}$$

と書かれる場合[1)]，固有値 $\{F_n\}$ の何れかが観測され，F_n が観測される確率は $|a_n|^2$

1)　δ_{mn} は Kronecker のデルタであり，整数 m, n に対し $m = n$ なら $\delta_{mn} = 1$，それ以外では $\delta_{mn} = 0$.

に比例する．また，固有値が連続的に分布する場合には $\{|F_\lambda\rangle\}$ の線形結合は

$$|a\rangle = \int d\lambda a(\lambda)|F_\lambda\rangle,\ \langle F_\lambda|F_\mu\rangle = \delta(\lambda-\mu),\ \widehat{F}|F_\lambda\rangle = F_\lambda|F_\lambda\rangle \qquad (1-9)$$

と表現されるが[1]，この場合には観測値が微小区間 $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ に含まれる確率が $|a(\lambda)|^2 d\lambda$ に比例することになる．

物理量の観測値は実数だから $\widehat{F}$ の固有値は実数でなければならない．また，系がどのような状態にあったとしても，どの観測値がどの確率で得られるのかが計算できる必要がある．そのためには任意のケット $|a\rangle$ が式 $(1-8)$ や式 $(1-9)$ のように展開できなければならない．つまり，物理量を表現する作用素 $\widehat{F}$ は実数だけを固有値とし，固有ケットから成る完全正規直交系 $\{|F_n\rangle\}$, $\{|F_\lambda\rangle\}$ を持つものでなければならない．ここで，Hermite 作用素の固有値は実数に限られ，異なる固有値に属する固有ケットは互いに直交することを思い起こそう[2]．固有値に縮退がある場合でも，すなわち互いに線形独立な複数の固有ケットが同じ固有値に属する場合でも適当な線形結合を選ぶことによって全ての固有ケットが正規直交系を成すようにできる．それゆえ，この正規直交系が完全でありさえすれば物理量に対応する作用素としての要件を全て満足することになる．そこで，固有ケットから成る完全な正規直交系を持つ Hermite 作用素を observable と呼ぶことにすれば，全ての observable はそれぞれ何等かの物理量に対応すると考えることができる．ちなみに，有界な Hermite 作用素は全て observable であるが，非有界な Hermite 作用素の中には observable でないものも存在する[3]

説明を簡便にするため，ここでは observable が離散的な固有値のみを持つという前提で議論を進めるが，和記号を積分記号で置き換えるといった簡単な変更を加えれば以下に示す結果は連続固有値を持つ observable にも適用できる．

$\widehat{F}$ を observable とし，その固有ケットからなる完全正規直交系を $\{|F_n\rangle\}$，各 $|F_n\rangle$ が属する $\widehat{F}$ の固有値を F_n とする．$\{|F_n\rangle\}$ は完全だから任意のケット $|a\rangle$ は式 $(1-8)$ にように展開できる．また，$\{|F_n\rangle\}$ は正規直交だから式 $(1-8)$ の両辺の左から $\langle F_m|$ を作用させれば $\langle F_m|a\rangle = a_m$ を得る．つまり，任意のケット $|a\rangle$ に対して

$$|a\rangle = \sum_n |F_n\rangle a_n = \sum_n |F_n\rangle\langle F_n|a\rangle = \left(\sum_n |F_n\rangle\langle F_n|\right)|a\rangle$$

が成立するから，

$$\sum_n |F_n\rangle\langle F_n| = \widehat{I} \qquad (1-10)$$

1) $\delta(.)$ は Dirac のデルタ関数．
2) 例えば，藤田宏：『関数解析』(岩波講座応用数学)，岩波書店 (1995)，156 ページ
3) 例えば，J.von Neumann 著，井上他訳：『量子力学の数学的基礎』，みすず書房 (1978)，114 ページ．

が結論される．逆に，正規直交系 $\{|F_n\rangle\}$ が式 (1-10) を満足すれば任意のケット $|a\rangle$ が式 (1-8) のように展開できるので $\{|F_n\rangle\}$ は完全である．こうした理由から式 (1-10) は完全性条件と呼ばれる．

さて，$\widehat{A}$ を S 上の任意の線形作用素とするとき，式 (1-10) によって

$$\widehat{A} = \widehat{I}\widehat{A}\widehat{I} = \left(\sum_m |F_m\rangle\langle F_m|\right)\widehat{A}\left(\sum_n |F_n\rangle\langle F_n|\right)$$
$$= \sum_{m,n} A_{mn}|F_m\rangle\langle F_n|, \quad A_{mn} \equiv \langle F_m|\widehat{A}|F_n\rangle \tag{1-11}$$

が成立するので，作用素 $\widehat{A}$ は複素数の組 $\{A_{mn}\}$ によって確定する．また，任意のケット $|a\rangle$ とその像 $|a'\rangle \equiv \widehat{A}|a\rangle$ を $\{|F_n\rangle\}$ で展開した場合の展開係数をそれぞれ $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ とすれば

$$a'_m = \langle F_m|\widehat{A}|a\rangle = \langle F_m|\widehat{A}\left(\sum_n |F_n\rangle\langle F_n|\right)|a\rangle$$
$$= \sum_n \langle F_m|\widehat{A}|F_n\rangle\langle F_n|a\rangle = \sum_n A_{mn}a_n \tag{1-12}$$

が成立する．それゆえ，A_{mn} を mn 要素とする無限次の行列を A, $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$ を第 n 成分とする無限次元の数ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ とすれば式 (1-12) は $\boldsymbol{a}' = A\boldsymbol{a}$ と表現できる．特に $\widehat{F}$ 自身に対応する行列 F の mn 要素は $F_{mn} = \langle F_m|\widehat{F}|F_n\rangle = F_n\delta_{mn}$ であり，F は $\{F_n\}$ を対角要素とする対角行列となる．また，式 (1-11) に対応して

$$\widehat{F} = \sum_n F_n|F_n\rangle\langle F_n| \tag{1-13}$$

が成立するが，同じ固有値に属する固有ケットを一つのグループにまとめれば

$$\widehat{F} = \sum_k \overline{F}_k\widehat{P}_k^F, \quad \widehat{P}_k^F \equiv \sum_l |F_l^k\rangle\langle F_l^k| \tag{1-14}$$

と表現できる．ここで $\overline{F}_k$ は $\widehat{F}$ の第 k 種類目の固有値であり，$\{|F_n\rangle\}$ の中から固有値 $\overline{F}_k$ に属するものだけを取出したのが $\{|F_l^k\rangle\}_{l=1\sim N_k^F}$ である．そのような $|F_n\rangle$ の個数 N_k^F は有限とは限らない点に注意しよう．$\{|F_l^k\rangle\}_{l=1\sim N_k^F}$ が張る N_k^F 次元の部分空間 V_k^F は固有値 $\overline{F}_k$ に属する $\widehat{F}$ の固有空間であり，V_k^F に属する任意のケットは固有値 $\overline{F}_k$ に属する $\widehat{F}$ の固有ケットである．そして，$j \neq k$ ならば V_j^F と V_k^F はベクトル空間として直交する $(V_j^F \perp V_k^F)$[1]．また，式 (1-8) を

1)　V_j^F に属する任意のケットが V_k^F に属する任意のケットと直交するので $V_j^F \perp V_k^F$.

$$|a\rangle = \sum_n a_n |F_n\rangle = \sum_k \left(\sum_{l=1}^{N_k^F} a_l^k |F_l^k\rangle \right) = \sum_k |a_k\rangle$$

$$|a_k\rangle \equiv \sum_{l=1}^{N_k^F} a_l^k |F_l^k\rangle \tag{1-15}$$

と書き換えてみれば分かるように，任意のケット $|a\rangle$ は V_k^F に属するケット $|a_k\rangle$ の和として一意的に表現される．従って状態空間 S は $\{V_k^F\}$ の直交直和である．

$$S = \bigoplus_k V_k^F = V_1^F \oplus V_2^F \oplus \cdots \oplus V_k^F \oplus \cdots \tag{1-16}$$

ところで，式 (1 - 13) に登場する $|F_n\rangle\langle F_n|$ は任意のケット $|a\rangle$ に作用して $|F_n\rangle$ 方向の成分だけを抽出する働きを持つ．実際，式 (1 - 8) のように展開される $|a\rangle$ に対して

$$|F_n\rangle\langle F_n| \sum_m a_m |F_m\rangle = \sum_m a_m |F_n\rangle\langle F_n|F_m\rangle$$

$$= \sum_m a_m |F_n\rangle \delta_{nm} = a_n |F_n\rangle$$

を得るが，これは確かに $|a\rangle$ の $|F_n\rangle$ 方向の成分である．このため，$|F_n\rangle\langle F_n|$ は $|F_n\rangle$ 方向への射影作用素と呼ばれる．より一般に，式 (1 - 14) で定義される作用素 $\widehat{P}_k^F$ は固有空間 V_k^F への射影作用素であり，式 (1 - 15) のように展開されるケット $|a\rangle$ に対して $\widehat{P}_k^F|a\rangle = |a_k\rangle$ が成立する[1]．また，$\{|F_n\rangle\}$ の正規直交性から容易に示されるように

$$\widehat{P}_j^F \widehat{P}_k^F = \widehat{P}_k^F \widehat{P}_j^F = \delta_{jk} \widehat{P}_k^F \tag{1-17}$$

が成立する．そして

$$(\widehat{P}_k^F)^\dagger = \left(\sum_l |F_l^k\rangle\langle F_l^k| \right)^\dagger = \sum_l \left(|F_l^k\rangle\langle F_l^k| \right)^\dagger$$

$$= \sum_l |F_l^k\rangle\langle F_l^k| = \widehat{P}_k^F \tag{1-18}$$

が成立するから $\widehat{P}_k^F$ は Hermite である．任意のケット $|a\rangle$ は V_k^F への射影成分 $|a_k\rangle$ と，その残りの成分 $|a_k^\perp\rangle \equiv |a\rangle - |a_k\rangle$ に分解されるが，式 (1 - 18) を使えば $\langle a_k|a_k^\perp\rangle = 0$ が結論される．このように，射影成分 $|a_k\rangle$ が残りの成分 $|a_k^\perp\rangle$ に直交するという意味

---

1) 式 (1 - 10) の左辺は全ての固有ケット $\{|F_n\rangle\}$ が張る空間 (S そのもの) への射影作用素だから，これが恒等作用素になるのは当然と言えよう．

で $\widehat{P}_k^F$ は直交射影作用素と呼ばれる．

1-2　可換な observable の完全な組

前節では式 $(1-8)$ のように展開されるケット $|a\rangle$ の状態にある系で物理量 $\widehat{F}$ を観測すれば観測値として F_n を得る確率が $|a_n|^2$ に比例すると述べたが，同じ固有値に属する線形独立な固有ケットが複数存在する場合には，それらの寄与を考慮しなければならない．例えば F_n が第 k 種類目の固有値 $\overline{F}_k$ に等しい場合，$\{|F_l^k\rangle\}_{l=1\sim N_k^F}$ は全て固有値 $\overline{F}_k$ に属するから $\overline{F}_k$ を観測する確率は

$$\sum_{l=1}^{N_k^F} |a_l^k|^2 = \||a_k\rangle\|^2 = \|\widehat{P}_k^F|a\rangle\|^2 \tag{1-19}$$

に比例することになる．そして観測の結果が $\overline{F}_k$ であったとすれば，観測の直後では系はケット $\widehat{P}_k^F|a\rangle$ で記述される状態にある．つまり，観測によって状態は $|a\rangle$ から $\widehat{P}_k^F|a\rangle$ に変化するのである．それゆえ，再び同一の物理量 $\widehat{F}$ を観測すれば第 j 種類目の固有値 $\overline{F}_j$ を観測する確率は

$$\|\widehat{P}_j^F(\widehat{P}_k^F|a\rangle)\|^2 = \|\widehat{P}_j^F\widehat{P}_k^F|a\rangle\|^2 = \delta_{jk}\|\widehat{P}_k^F|a\rangle\|^2$$

に比例するが，$j=k$ 以外では零となるため確実に $\overline{F}_k$ だけが観測される．また，観測による状態の変化は起こらない（状態は $\widehat{P}_k^F|a\rangle$ に留まる）．

では，二つの物理量 $\widehat{F},\widehat{G}$ を順次に測定した場合はどうだろうか．状態 $|a\rangle$ にある系で物理量 $\widehat{F}$ を観測した結果が $\overline{F}_k$ であり，次いで $\widehat{G}$ を観測した結果が $\overline{G}_l$ だったとすれば，その直後には系は $\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F|a\rangle$ で記述される状態にある（$\widehat{P}_l^G$ は固有値 $\overline{G}_l$ に属する $\widehat{G}$ の固有空間 V_l^G への直交射影作用素）．ここで，$\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F|a\rangle$ が V_k^F に属するならば，すなわち

$$\widehat{P}_k^F\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F|a\rangle = \widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F|a\rangle \tag{1-20}$$

が成立する場合には再び $\widehat{F}$ を観測すれば確実に $\overline{F}_k$ を得るが，式 $(1-20)$ が成立しなければ $\overline{F}_k$ 以外の観測値を得る可能性もある．系がどのような状態にあっても $\widehat{G}$ の観測が $\widehat{F}$ の観測に影響しないためには全てのケット $|a\rangle$，任意の k,l に対して式 $(1-20)$ が成立する必要があり，従って

$$\widehat{P}_k^F\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F = \widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F \qquad (k,l=1,2,\cdots) \tag{1-21}$$

でなければならない．ところが，$\widehat{P}_k^F$，$\widehat{P}_l^G$ は Hermite だから

$$\widehat{P}_k^F\widehat{P}_l^G = (\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F)^\dagger = (\widehat{P}_k^F\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F)^\dagger = \widehat{P}_k^F\widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F = \widehat{P}_l^G\widehat{P}_k^F$$

が成立し，

$$\widehat{F}\widehat{G} = \left(\sum_k \overline{F}_k \widehat{P}_k^F\right)\left(\sum_l \overline{G}_l \widehat{P}_l^G\right)$$
$$= \left(\sum_l \overline{G}_l \widehat{P}_l^G\right)\left(\sum_k \overline{F}_k \widehat{P}_k^F\right) = \widehat{G}\widehat{F}$$

が言える．つまり，$\widehat{G}$ の観測が $\widehat{F}$ の観測に影響しないためには $\widehat{F}$ と $\widehat{G}$は可換でなければならない[1)]．

$$[\widehat{F}, \widehat{G}] \equiv \widehat{F}\widehat{G} - \widehat{G}\widehat{F} = \widehat{0} \tag{1-22}$$

この場合には $\widehat{F}$ の観測も $\widehat{G}$ の観測には影響を与えない点に注意しよう．

さて，observable $\widehat{F}$ が式 (*1－13*), (*1－14*) のように展開されることから，$f(.)$ を任意の実関数（実数を実数に写す写像）とするとき，$\widehat{F}$ の関数 $f(\widehat{F})$ を

$$f(\widehat{F}) \equiv \sum_n f(F_n)|F_n\rangle\langle F_n| = \sum_k f(\overline{F}_k)\widehat{P}_k^F \tag{1-23}$$

で定義しよう．$f(\widehat{F})$ は Hermite であり，その固有ケットからなる完全正規直交系 $\{|F_n\rangle\}$ を持つから observable である．二つの observable $\widehat{F}$, $f(\widehat{F})$ は可換であり，一方の観測は他方の観測に影響を与えない．$|F_n\rangle$ は $\widehat{F}, f(\widehat{F})$ の同時固有ケットであり，系が状態 $|F_n\rangle$ にあれば両者の観測値は共に確定してそれぞれ F_n, $f(F_n)$ である．$\widehat{F}$ を与えれば $f(\widehat{F})$ が決まることを考えればこれは当然の結果と言えよう．

$\widehat{F}$ とその関数 $f(\widehat{F})$ が可換であることは上述の通りだが，$\widehat{F}$ が縮退した固有値を持たない場合にはこの逆も成立し，$\widehat{F}$ と可換な observable $\widehat{G}$ は $\widehat{F}$ の関数である．これを示そう．まず，

$$\widehat{F}\widehat{G}|F_n\rangle = \widehat{G}\widehat{F}|F_n\rangle = \widehat{G}F_n|F_n\rangle = F_n\widehat{G}|F_n\rangle \tag{1-24}$$

が成立するから $\widehat{G}|F_n\rangle$ は $|F_n\rangle$ と同じく固有値 F_n に属する $\widehat{F}$ の固有ケットであり，F_n は縮退していないから G_n を適当なスカラとして $\widehat{G}|F_n\rangle = G_n|F_n\rangle$ と書ける．つまり $|F_n\rangle$ は固有値 G_n に属する $\widehat{G}$ の固有ケットでもある．observable $\widehat{G}$ の固有値 G_n は実数だから，$g(F_n) = G_n (n = 1, 2, \cdots)$ を満足するように実関数 $g(.)$ を選ぶことができ，この実関数を使えば $\widehat{G} = g(\widehat{F})$ が成立する．

一方，$\widehat{F}$ が縮退した固有値を持つ場合には $\widehat{F}$ と可換ではあるが $\widehat{F}$ の関数としては

---

1)　$\widehat{0}$ は零作用素であり「任意の $|a\rangle \in S$ に対して $\widehat{0}|a\rangle$ が零ベクトルとなる」ことで定義される．

表現できないobservableが存在する．例えば $\widehat{F}$ を式(1-13)のように展開したとき $F_1 = F_2 = \kappa$ だったとすれば

$$\widehat{G} = \lambda|F_1\rangle\langle F_1| + \mu|F_2\rangle\langle F_2| + \sum_{n>2} F_n|F_n\rangle\langle F_n|, \quad (\lambda \neq \mu)$$

は $\widehat{F}$ と可換ではあるが $\widehat{F}$ の関数としては表現できない．なぜなら，仮に $\widehat{G} = f(\widehat{F})$ と書けたとすれば $|F_1\rangle, |F_2\rangle$ は同じ固有値 $f(\kappa)$ に属する $\widehat{G}$ の固有ケットだが，実際には異なる固有値 λ, μ に属するからである．

ところで，$\widehat{F}$ が縮退した固有値を持つ場合でも $\widehat{F}$ と可換なobservable $\widehat{G}$ は $\widehat{F}$ の固有空間 V_k^F を不変に保つ．実際，$|a\rangle \in V_k^F$ ならば

$$\widehat{F}\widehat{G}|a\rangle = \widehat{G}\widehat{F}|a\rangle = \widehat{G}\overline{F}_k|a\rangle = \overline{F}_k\widehat{G}|a\rangle$$

が成立するから $\widehat{G}|a\rangle \in V_k^F$ である．それゆえ $\widehat{G}$ は V_k^F 上のHermite作用素であり，$\widehat{G}$ の固有ケットからなる V_k^F の正規直交基底 $\{|\overline{F}_k,\ G_{k,n}^F\rangle\}_{n=1\sim N_k^F}$ が存在する[1]．$|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle$ は V_k^F に含まれるため $\widehat{F}$ の固有ケットでもあり，

$$\widehat{F}|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle = \overline{F}_k|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle, \quad \widehat{G}|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle = G_{k,n}^F|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle \qquad (1-25)$$

が成立する．従って，$\{\{|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle\}_{n=1\sim N_k^F}\}_{k=1,2,\cdots}$ は $\widehat{F}$ と $\widehat{G}$ の同時固有ケットから成る状態空間全体の正規直交基底である．V_k^F 上のHermite作用素としての $\widehat{G}$ が縮退している場合も考慮して第 l 番目の固有値を $\overline{G}_{k,l}^F$ と記し，この固有値が $N_{k,l}^{F,G}$ 重に縮退しているものとする[2]．あるいは「$\widehat{F}$ に関しては固有値 $\overline{F}_k$ に属し，$\widehat{G}$ に関しては固有値 $\overline{G}_{k,l}^F$ に属する同時固有空間 $V_{k,l}^{F,G}$ の次元が $N_{k,l}^{F,G}$ である」と言っても良い．また，$\{|\overline{F}_k, G_{k,n}^F\rangle\}_{n=1\sim N_k^F}$ の中で $V_{k,l}^{F,G}$ に属する $N_{k,l}^{F,G}$ 個のケットを $\{|\overline{F}_k, G_{k,m}^{F,l}\rangle\}_{m=1\sim N_{k,l}^{F,G}}$ と記せば，$V_{k,l}^{F,G}$ への直交射影作用素は

$$\widehat{P}_{k,l}^{F,G} = \sum_{m=1}^{N_{k,l}^{F,G}} |\overline{F}_k, G_{k,m}^{F,l}\rangle\langle\overline{F}_k, G_{k,m}^{F,l}| \qquad (1-26)$$

と表現され，$\widehat{F}$ や $\widehat{G}$ は

$$\widehat{F} = \sum_k\sum_l \overline{F}_k\widehat{P}_{k,l}^{F,G}, \quad \widehat{G} = \sum_k\sum_l \overline{G}_{k,l}^F\widehat{P}_{k,l}^{F,G} \qquad (1-27)$$

---

1) $G_{k,n}^F$ の上付添字 “F” と下付添字 “k” は $\widehat{F}$ の第 k 種類目の固有値 $\overline{F}_k$ に属する固有空間 V_k^F における固有値であることを示す．

2) $N_{k,l}^{F,G}$ は無限大の可能性もある．

と展開できる．そこで，2変数実関数 $f(.,.)$ に対して $f(\widehat{F},\widehat{G})$ を

$$f(\widehat{F},\widehat{G}) \equiv \sum_k \sum_l f(\overline{F}_k, \overline{G}^F_{k,l}) \widehat{P}^{F,G}_{k,l} \tag{1-28}$$

で定義すれば，$f(\widehat{F},\widehat{G})$ は $\widehat{F}$ や $\widehat{G}$ と可換であり，$\widehat{F}$ と $\widehat{G}$ の観測値が与えられれば $f(\widehat{F},\widehat{G})$ の観測値も確定する．式(*1−24*)から出発して $\widehat{G}=g(\widehat{F})$ が結論されたように，$\widehat{F}$ と $\widehat{G}$ の同時固有値が縮退していなければ（同時固有空間 $V^{F,G}_{k,l}$ が全て1次元ならば）$\widehat{F},\widehat{G}$ のどちらとも可換な observable $\widehat{H}$ は適当な関数を使って $\widehat{H}=h(\widehat{F},\widehat{G})$ と書けることが示される．一方，$\widehat{F},\widehat{G}$ の同時固有値が縮退している場合には $\widehat{F},\widehat{G}$ と可換ではあるが $\widehat{F},\widehat{G}$ の関数としては表現できない observable $\widehat{H}$ が存在する．この場合でも $\widehat{H}$ は同時固有空間 $V^{F,G}_{k,l}$ を不変にし，$V^{F,G}_{k,l}$ 上の Hermite 作用素となるため $\widehat{H}$ の固有ケットから成る $V^{F,G}_{k,l}$ の正規直交基底 $\{|F_k, G^F_{k,l}, H^{F,G}_{k,l,n}\rangle\}_{n=1\sim N^{F,G}_{k,l}}$ が存在する．各 $|F_k, G^F_{k,l}, H^{F,G}_{k,l,n}\rangle$ が $\widehat{F},\widehat{G},\widehat{H}$ の同時固有ケットであることは言うまでもない．

このように，$\widehat{F}$ と可換な observable $\widehat{G},\widehat{H},\cdots$ を次々に導入することによって同時固有空間の次元を順次に減少させ，最終的には全ての同時固有空間を1次元にすることができる．このとき，$(\widehat{F},\widehat{G},\widehat{H},\cdots)$ を可換な observable の完全な組 (complete set of commuting observables) と呼ぶ．$(\widehat{F},\widehat{G},\widehat{H},\cdots)$ は互いに他に影響を及ぼすことなく観測でき，同時固有値 $(\overline{F}_k, \overline{G}^F_{k,l}, \overline{H}^{F,G}_{k,l,m},\cdots)$ を指定すれば系の状態は一意的に決まってしまう．また，$(\widehat{F},\widehat{G},\widehat{H},\cdots)$ の全てと可換な observable は $(\widehat{F},\widehat{G},\widehat{H},\cdots)$ の関数として表現できる，という点でも重要な意味を持っている．

1−3　正準変数に対応する observable とその固有状態

古典系で中心的な役割を演ずるのは正準変数 $q_1,q_2,\cdots,p_1,p_2,\cdots$ であり，それらは Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}_P$ で記述される正準条件

$$\{q_m,p_n\}_P=\delta_{mn},\quad \{q_m,q_n\}_P=0,\quad \{p_m,p_n\}_P=0 \tag{1-29}$$

によって特徴付けられる[1]．この正準条件を対応する作用素 $\widehat{q}_1,\widehat{q}_2,\cdots,\widehat{p}_1,\widehat{p}_2,\cdots$ に関する正準交換関係

$$[\widehat{q}_m,\widehat{p}_n]=i\delta_{mn}\widehat{I},\quad [\widehat{q}_m,\widehat{q}_n]=\widehat{0},\quad [\widehat{p}_m,\widehat{p}_n]=\widehat{0} \tag{1-30}$$

で置き換えるのが正準量子化に他ならない[2]．式(*1−30*)によって $\widehat{q}_1,\widehat{q}_2,\cdots$ は全て互いに可換だから，これらの同時固有ケットからなる正規直交基底 $\{|q_1,q_2,\cdots\rangle\}$ が存在する．一般的に証明されるわけではないが，$\widehat{q}_1,\widehat{q}_2,\cdots$ は可換な observable の完全な組

1) 例えば，山内恭彦：『一般力学』（増訂第3版），岩波書店(1975)，226ページ．
2) 特に断りがない限り本書では $\hbar=1$，$c=1$ となる自然単位系を採用する．

を構成し，固有値の組 $(q_1, q_2, \cdots)$ を指定すれば状態は一意的に決まるものと仮定しよう．同様に $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \cdots$ もまた可換な observable の完全な組を構成するものとし，それらの同時固有ケットからなる正規直交基底を $\{|p_1, p_2, \cdots\rangle\}$ と記す．更に $q_1, q_2, \cdots$ や $p_1, p_2, \cdots$ を成分とするベクトル $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ を使って $|q_1, q_2, \cdots\rangle$ や $|p_1, p_2, \cdots\rangle$ を $|\boldsymbol{q}\rangle, |\boldsymbol{p}\rangle$ と略記し，$\widehat{q}_1, \widehat{q}_2, \cdots$ や $\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \cdots$ を並べて作った作用素ベクトルを $\widehat{\boldsymbol{q}}, \widehat{\boldsymbol{p}}$ で表すことにする．このとき，$|\boldsymbol{q}\rangle$ や $|\boldsymbol{p}\rangle$ が $\widehat{\boldsymbol{q}}, \widehat{\boldsymbol{p}}$ の同時固有ケットであることは

$$\widehat{\boldsymbol{q}}|\boldsymbol{q}\rangle = \boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}\rangle, \quad \widehat{\boldsymbol{p}}|\boldsymbol{p}\rangle = \boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle \tag{1-31}$$

として表現される．以後，系の自由度を N で表すことにしよう．従って $\boldsymbol{q}$ や $\boldsymbol{p}$ は N 次元のベクトルである．

さて，式 (1-30) から数学的帰納法によって証明されるように

$$[\widehat{q}_m, \widehat{p}_n^k] = ik\delta_{mn}\widehat{p}_n^{k-1}, \quad [\widehat{q}_m^k, \widehat{p}_n] = ik\delta_{mn}\widehat{q}_n^{k-1} \tag{1-32}$$

であり，これから

$$\begin{aligned} [\widehat{q}_m, \exp(-i\alpha\widehat{p}_n)] &= \alpha\delta_{mn}\exp(-i\alpha\widehat{p}_n) \\ [\exp(-i\alpha\widehat{q}_m), \widehat{p}_n] &= \alpha\delta_{mn}\exp(-i\alpha\widehat{q}_m) \end{aligned} \tag{1-33}$$

が結論される (α は定数)．例えば第1式を示すには次のようにすれば良い[1]．

$$\begin{aligned} [\widehat{q}_m, \exp(-i\alpha\widehat{p}_n)] &= \sum_{k=0}^{\infty}[\widehat{q}_m, (-i\alpha\widehat{p}_n)^k]/k! \\ &= \delta_{mn}\sum_{k=0}^{\infty}(-i\alpha)^k ik\widehat{p}_n^{k-1}/k! \\ &= i(-i\alpha)\delta_{mn}\sum_{k=1}^{\infty}(-i\alpha)^{k-1}\widehat{p}_n^{k-1}/(k-1)! \\ &= \alpha\delta_{mn}\exp(-i\alpha\widehat{p}_n) \end{aligned}$$

このため，$\boldsymbol{q}$ を実ベクトルとして

$$\widehat{U} \equiv \exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}) = \exp(-i\sum_{n=1}^{N}q_n\widehat{p}_n) = \prod_{n=1}^{N}\exp(-iq_n\widehat{p}_n) \tag{1-34}$$

---

1) 同様の議論から，$\widehat{p}_n$ や $\widehat{q}_m$ のべき級数展開で表現できる任意の関数 $f(\widehat{p}_n)$, $g(\widehat{q}_m)$ に対して

$$[\widehat{q}_m, f(\widehat{p}_n)] = i\delta_{mn}\frac{d}{d\widehat{p}_n}f(\widehat{p}_n), \quad [g(\widehat{q}_m), \widehat{p}_n] = i\delta_{mn}\frac{d}{d\widehat{q}_m}g(\widehat{q}_m)$$

が示される．ただし $\widehat{p}_n$ や $\widehat{q}_m$ による微分は，あたかもそれらが通常の数であると考えて計算する．

を定義すれば ($\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \cdots, \widehat{p}_N$ が可換である点に注意)

$$
\begin{aligned}
[\widehat{q}_m, \widehat{U}] &= [\widehat{q}_m, \prod_n \exp(-iq_n\widehat{p}_n)] \\
&= [\widehat{q}_m, \exp(-iq_m\widehat{p}_m)] \prod_{n\neq m} \exp(-iq_n\widehat{p}_n) \\
&= q_m \exp(-iq_m\widehat{p}_m) \prod_{n\neq m} \exp(-iq_n\widehat{p}_n) = q_m\widehat{U}
\end{aligned}
$$

が任意の m に対して成立するから

$$
[\widehat{\boldsymbol{q}}, \widehat{U}] = \boldsymbol{q}\widehat{U} \tag{1-35}
$$

が言える．この式の両辺を同時固有値 $\mathbf{0}$ に属する $\widehat{\boldsymbol{q}}$ の同時固有ケット $|\mathbf{0}\rangle_q$ に作用させれば，左辺からは

$$
[\widehat{\boldsymbol{q}}, \widehat{U}]|\mathbf{0}\rangle_q = (\widehat{\boldsymbol{q}}\widehat{U} - \widehat{U}\widehat{\boldsymbol{q}})|\mathbf{0}\rangle_q = \widehat{\boldsymbol{q}}\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q - \widehat{U}\mathbf{0}|\mathbf{0}\rangle_q = \widehat{\boldsymbol{q}}\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q
$$

を得，右辺からは $\boldsymbol{q}\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q$ を得るから $\widehat{\boldsymbol{q}}\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q = \boldsymbol{q}\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q$ であり，$\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q$ は同時固有値 $\boldsymbol{q}$ に属する $\widehat{\boldsymbol{q}}$ の同時固有ケットである．ところが，仮定によって同時固有値には縮退がないから適当な複素数 K を用いて

$$
\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q = K|\boldsymbol{q}\rangle \tag{1-36}
$$

と書ける．ところで $\widehat{\boldsymbol{p}}$ は Hermite であり，$\boldsymbol{q}$ は実ベクトルだから

$$
\widehat{U}^\dagger = \{\exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})\}^\dagger = \exp(\{-i\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}\}^\dagger) = \exp(i\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}) = \widehat{U}^{-1}
$$

が成立し，$\widehat{U}$ は unitary である．それゆえ，式 (*1-36*) から

$$
{}_q\langle\mathbf{0}|\widehat{U}^\dagger\widehat{U}|\mathbf{0}\rangle_q = {}_q\langle\mathbf{0}|\mathbf{0}\rangle_q = \langle\boldsymbol{q}|K^*K|\boldsymbol{q}\rangle = |K|^2\langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}\rangle
$$

を得るが，$|\mathbf{0}\rangle_q$ と $|\boldsymbol{q}\rangle$ は規格化されているため $|K| = 1$ である．従って $\{K|\boldsymbol{q}\rangle\}$ もまた $\widehat{\boldsymbol{q}}$ の同時固有ケットからなる正規直交基底であり，$\{|\boldsymbol{q}\rangle\}$ の代わりとして $\{K|\boldsymbol{q}\rangle\}$ を採用できる．そこで，$\{K|\boldsymbol{q}\rangle\}$ を改めて $\{|\boldsymbol{q}\rangle\}$ と記せば式 (*1-36*) は

$$
\exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})|\mathbf{0}\rangle_q = |\boldsymbol{q}\rangle \tag{1-37}
$$

と書け，全く同様にして

$$
\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}})|\mathbf{0}\rangle_p = |\boldsymbol{p}\rangle \tag{1-38}
$$

が結論される．ただし，$|\mathbf{0}\rangle_p$ は同時固有値 $\mathbf{0}$ に属する $\widehat{\boldsymbol{p}}$ の同時固有ケットである．

ここで，式 (*1-37*) によって $|\mathbf{0}\rangle_q$ に対する $|\boldsymbol{q}\rangle$ の位相が定まり，式 (*1-38*) によっ

て $|\mathbf{0}\rangle_p$ に対する $|\boldsymbol{p}\rangle$ の位相が確定する点に注意を要する．残るは $|\mathbf{0}\rangle_q$ に対する $|\mathbf{0}\rangle_p$ の位相であるが，これも後ほど確定する．

さて，式 (1-37), (1-38) の両辺の左から $\langle\boldsymbol{p}|, \langle\boldsymbol{q}|$ を作用させれば

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{p}|\exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})|\mathbf{0}\rangle_q &= \exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})\langle\boldsymbol{p}|\mathbf{0}\rangle_q = \langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle \\ \langle\boldsymbol{q}|\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\widehat{\boldsymbol{q}})|\mathbf{0}\rangle_p &= \exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\langle\boldsymbol{q}|\mathbf{0}\rangle_p = \langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle\end{aligned} \tag{1-39}$$

を得るが，$\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = \langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle^*$ だから $\langle\boldsymbol{p}|\mathbf{0}\rangle_q = {}_p\langle\mathbf{0}|\boldsymbol{q}\rangle$ が言える．ところが $\langle\boldsymbol{p}|\mathbf{0}\rangle_q$ は $\boldsymbol{p}$ のみの関数，${}_p\langle\mathbf{0}|\boldsymbol{q}\rangle$ は $\boldsymbol{q}$ のみの関数だから両者とも定数でなければならない．この定数を C とすれば $\langle\boldsymbol{q}|\mathbf{0}\rangle_p = {}_p\langle\mathbf{0}|\boldsymbol{q}\rangle^* = C^*$ であり，式 (1-39) の第2式によって

$$\langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle = C^*\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) \tag{1-40}$$

と書ける．すると

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') = \langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{q}'\rangle &= \int d\boldsymbol{p}\langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}'\rangle = \int d\boldsymbol{p}\langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{q}'|\boldsymbol{p}\rangle^* \\ &= \int d\boldsymbol{p}C^*\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})C\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}') \\ &= |C|^2\int d\boldsymbol{p}\exp\{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\} = (2\pi)^N|C|^2\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\end{aligned} \tag{1-41}$$

が成立し，これから $|C| = (2\pi)^{-N/2}$ が結論される．ここで $\{|\boldsymbol{p}\rangle\}$ に関する完全性条件

$$\int d\boldsymbol{p}|\boldsymbol{p}\rangle\langle\boldsymbol{p}| = \widehat{I} \tag{1-42}$$

とデルタ関数の表式

$$\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \equiv \prod_{n=1}^{N}\delta(q_n-q_n') = \frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}\exp\{i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{p}\}$$

を利用している．

さて，式 (1-37) や 式 (1-38) を要求するだけでは $|\mathbf{0}\rangle_q$ に対する $|\mathbf{0}\rangle_p$ の位相は定まらないことは前述の通りだが，この位相を適当に選べば定数 C が正の実数であるようにできる．すると $C = (2\pi)^{-N/2}$ であり，これを式 (1-40) に代入すれば

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) \\ \langle\boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})\end{aligned} \tag{1-43}$$

を得る．こうして，$|\mathbf{0}\rangle_q$ に対する $|\boldsymbol{q}\rangle, |\boldsymbol{p}\rangle$ の位相が全て確定することになる．

最後に，式 (*1-43*) を使って周知の公式

$$\langle \boldsymbol{q}|\widehat{p}_m|\psi\rangle = -i\frac{\partial}{\partial q_m}\langle \boldsymbol{q}|\psi\rangle \tag{1-44}$$

を導こう（$|\psi\rangle$ は任意のケット）．実際，

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{q}|\widehat{p}_m|\psi\rangle &= \int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}'\langle \boldsymbol{q}|\widehat{p}_m|\boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}'\rangle\langle \boldsymbol{q}'|\psi\rangle \\
&= \int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}' p_m\langle \boldsymbol{q}|\boldsymbol{p}\rangle\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}'\rangle\langle \boldsymbol{q}'|\psi\rangle \\
&= \int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}' p_m\frac{\exp(i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})}{(2\pi)^{N/2}}\frac{\exp(-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}')}{(2\pi)^{N/2}}\langle \boldsymbol{q}'|\psi\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{q}'\langle \boldsymbol{q}'|\psi\rangle\int d\boldsymbol{p}p_m\exp\{i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{p}\} \\
&= \int d\boldsymbol{q}'\langle \boldsymbol{q}'|\psi\rangle(-i)\frac{\partial}{\partial q_m}\left[\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}\exp\{i(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{p}\}\right] \\
&= (-i)\frac{\partial}{\partial q_m}\int d\boldsymbol{q}'\langle \boldsymbol{q}'|\psi\rangle\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') = -i\frac{\partial}{\partial q_m}\langle \boldsymbol{q}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

と変形できる．

1-4 Heisenberg 表示と Schrödinger 表示

古典系では正準変数 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ と時間 t の関数である物理量 $F(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ の時間発展は系の Hamiltonian $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ を使って

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial}{\partial t}F + \{F,H\}_P \tag{1-45}$$

として記述される．これを量子系に読み替えるには F や H を対応する作用素 $\widehat{F},\widehat{H}$ で置き換え，Poisson 括弧 $\{.,.\}_P$ の代りに交換子 $i^{-1}[.,.]$ を使えば良い．つまり

$$\frac{d}{dt}\widehat{F} = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{F} + i^{-1}[\widehat{F},\widehat{H}] \;\to\; i\frac{d}{dt}\widehat{F} = i\frac{\partial}{\partial t}\widehat{F} + [\widehat{F},\widehat{H}] \tag{1-46}$$

であり，これを Heisenberg の運動方程式という．特に正準変数 $\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}}$ 自体は[1)]

$$i\frac{d}{dt}\widehat{\boldsymbol{q}} = [\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{H}],\quad i\frac{d}{dt}\widehat{\boldsymbol{p}} = [\widehat{\boldsymbol{p}},\widehat{H}] \tag{1-47}$$

に従う．物理量 $\widehat{F}$ は $\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}}$ と時間 t の関数であって $\widehat{F}(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)$ と表現できるが[2)]，式 (*1-47*) の解 $\widehat{\boldsymbol{q}}(t),\widehat{\boldsymbol{p}}(t)$ を代入すれば時間のみの関数 $\widehat{F}(\widehat{\boldsymbol{q}}(t),\widehat{\boldsymbol{p}}(t),t)$ となり，これ

---

1) $\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}}$ は正準変数に対応する作用素であるが，簡単のため単に正準変数と呼ぶ．また，$\widehat{H}$ も単に Hamiltonian と称する．

2) ただし $\widehat{F}(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)$ の関数形は古典系と同一とは限らない．詳しくは次節を参照のこと．

を微分したのが式 (1 − 46) 左辺の $d\hat{F}/dt$ である．ところで，$\hat{F} = \hat{H}$ の場合には式 (1 − 46) によって

$$d\hat{H}/dt = \partial\hat{H}/\partial t \tag{1-48}$$

が成立するため，保存系では，つまり $\hat{H}$ が時間に陽に依存せず $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p})$ と表現できる場合には，$\hat{q}$ や $\hat{p}$ が変化しても $\hat{H}$ は不変に留まる．

さて，簡単のため $\hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t), t)$ を $\hat{H}(t)$ と記し，作用素 $\hat{\Phi}(t, t_0)$ を

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}(t, t_0) = i\hat{H}(t)\hat{\Phi}(t, t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0, t_0) = \hat{I} \tag{1-49}$$

の解として定義しよう．保存系では $\hat{H}$ は一定だから $\hat{\Phi}(t, t_0)$ は簡単に求まって

$$\hat{\Phi}(t, t_0) = \exp(i\hat{H}(t - t_0)) \tag{1-50}$$

を得るが，非保存系では異なる時刻における $\hat{H}$ が可換とは限らないため $\hat{\Phi}(t, t_0)$ の計算は繁雑となる．付録 A-1 では式 (1 − 49) の $i\hat{H}(t)$ を有限次の行列 $A(t)$ で置き換えた方程式を考え，その解として定義される行列 $\Phi(t, t_0)$ の性質について議論しているが，類似の議論を繰り返せば式 (1 − 49) の解である $\hat{\Phi}(t, t_0)$ に関しても同様の結果を導くことができる[1]．付録 A-1 の式 (A − 12), (A − 13), (A − 15), (A − 16) に対応して

$$\hat{\Phi}(t, t_0) = T\left[\exp\left(i\int_{t_0}^{t} d\tau \hat{H}(\tau)\right)\right] \tag{1-51}$$

$$\hat{\Phi}(t, t_0) = \hat{\Phi}(t, t_1)\hat{\Phi}(t_1, t_0) \tag{1-52}$$

$$\hat{\Phi}(t, t_0)^{-1} = \hat{\Phi}(t_0, t) \tag{1-53}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}(t_0, t) = -i\hat{\Phi}(t_0, t)\hat{H}(t) \tag{1-54}$$

が成立することは容易に理解できるであろう．また，任意の t に対して $\hat{H}(t)$ が Hermite ならば式 (1 − 49) の両辺の Hermite 共役を取ることによって

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}(t, t_0)^{\dagger} = \{i\hat{H}(t)\hat{\Phi}(t, t_0)\}^{\dagger} = -i\hat{\Phi}(t, t_0)^{\dagger}\hat{H}(t),$$

$$\hat{\Phi}(t_0, t_0)^{\dagger} = \hat{I}$$

を得る．つまり $\hat{\Phi}(t, t_0)^{\dagger}$ は $\hat{\Phi}(t_0, t)$ を規定する方程式 (1 − 54) を満足するが，この

---

1) 付録 A-1 では $\Phi(t, t_0)$ を状態遷移行列と名付けているが，$\hat{\Phi}(t, t_0)$ を「状態遷移作用素」と呼ぶことはしない．その理由は後ほど明かとなる．

方程式と初期条件 $\widehat{\Phi}(t_0,t_0)=\widehat{I}$ によって $\widehat{\Phi}(t_0,t)$ は一意的に決まるから $\widehat{\Phi}(t,t_0)^\dagger$ は $\widehat{\Phi}(t_0,t)$ に一致する．このため，式(1－53)によれば

$$\widehat{\Phi}(t,t_0)^\dagger=\widehat{\Phi}(t_0,t)=\widehat{\Phi}(t,t_0)^{-1} \tag{1-55}$$

が成立し，作用素 $\widehat{\Phi}(t,t_0)$ は unitary である．

さて，物理量 $\widehat{F}$ に対して

$$\widehat{F}_S\equiv\widehat{\Phi}(t,t_0)^\dagger\widehat{F}\widehat{\Phi}(t,t_0)=\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{F}\widehat{\Phi}(t,t_0) \tag{1-56}$$

を定義すれば

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widehat{F}_S&=\frac{\partial\widehat{\Phi}(t_0,t)}{\partial t}\widehat{F}\widehat{\Phi}(t,t_0)+\widehat{\Phi}(t_0,t)\frac{d\widehat{F}}{dt}\widehat{\Phi}(t,t_0)+\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{F}\frac{\partial\widehat{\Phi}(t,t_0)}{\partial t}\\
&=\frac{1}{i}\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{H}\widehat{F}\widehat{\Phi}(t,t_0)\\
&\quad+\widehat{\Phi}(t_0,t)\left\{\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}+\frac{1}{i}[\widehat{F},\widehat{H}]\right\}\widehat{\Phi}(t,t_0)+\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{F}i\widehat{H}\widehat{\Phi}(t,t_0)\\
&=\widehat{\Phi}(t_0,t)\left\{\frac{1}{i}\widehat{H}\widehat{F}+\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}+\frac{1}{i}(\widehat{F}\widehat{H}-\widehat{H}\widehat{F})-\frac{1}{i}\widehat{F}\widehat{H}\right\}\widehat{\Phi}(t,t_0)\\
&=\widehat{\Phi}(t_0,t)\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}\widehat{\Phi}(t,t_0)
\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{d}{dt}\widehat{F}_S=\widehat{\Phi}(t_0,t)\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}\widehat{\Phi}(t,t_0) \tag{1-57}$$

を得る．従って $\widehat{F}$ が時間を陽に含まなければ $\widehat{F}_S$ は時間に依存しないことになる．また，固定されたケット $|\phi\rangle$ から時間に依存するケット $|\phi(t)\rangle$ を

$$|\phi(t)\rangle\equiv\widehat{\Phi}(t_0,t)|\phi\rangle \tag{1-58}$$

で定義すれば[1)]，$\widehat{\Phi}(t,t_0)$ の unitary 性によって

$$\langle\phi(t)|=\{\widehat{\Phi}(t_0,t)|\phi\rangle\}^\dagger=\langle\phi|\widehat{\Phi}(t_0,t)^\dagger=\langle\phi|\widehat{\Phi}(t,t_0) \tag{1-59}$$

---

1)　$|\phi(t)\rangle\equiv\widehat{\Phi}(t,t_0)|\phi\rangle$ でない点に注意．後ほど作用素 $\widehat{U}(t_0,t)\equiv\widehat{\Phi}(t,t_0)$ を導入して $|\phi(t)\rangle=\widehat{U}(t,t_0)|\phi\rangle$ と表現する．

と書ける．一方，式 (1 - 56) を $\widehat{F}$ について解けば

$$\widehat{F} = \widehat{\Phi}(t, t_0)\widehat{F}_S\left[\widehat{\Phi}(t, t_0)\right]^{-1} = \widehat{\Phi}(t, t_0)\widehat{F}_S\widehat{\Phi}(t_0, t) \tag{1-60}$$

を得るから，任意のケット $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ と任意の物理量 $\widehat{F}$ に対して

$$\langle\psi|\widehat{F}|\phi\rangle = \langle\psi|\widehat{\Phi}(t, t_0)\widehat{F}_S\widehat{\Phi}(t_0, t)|\phi\rangle = \langle\psi(t)|\widehat{F}_S|\phi(t)\rangle \tag{1-61}$$

が成立する．観測に係るのは物理量 $\widehat{F}$ を二つのケット $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ で挟んで得られるスカラ $\langle\psi|\widehat{F}|\phi\rangle$ であるが，これを式 (1 - 61) の右辺のように解釈しても良いことが分かる．この二通りの解釈法を区別するため，式 (1 - 61) の左辺による解釈を Heisenberg 表示，右辺による解釈を Schrödinger 表示と呼ぶことにする．つまり，系の状態 $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ は不変に留まり，物理量 $\widehat{F}$ が古典論に類似の運動方程式に従って変化するという見方を Heisenberg 表示，系の時間発展を状態の時間変化として捉えるのを Schrödinger 表示というのである．更に，式 (1 - 58) によれば

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle &= i\frac{\partial\widehat{\Phi}(t_0, t)}{\partial t}|\phi\rangle = \widehat{\Phi}(t_0, t)\widehat{H}|\phi\rangle \\ &= \widehat{\Phi}(t_0, t)\widehat{H}\widehat{\Phi}(t_0, t)^{-1}\widehat{\Phi}(t_0, t)|\phi\rangle = \widehat{H}_S|\phi(t)\rangle \end{aligned}$$

すなわち

$$i\frac{d}{dt}|\phi(t)\rangle = \widehat{H}_S(t)|\phi(t)\rangle \tag{1-62}$$

が成立し，Schrödinger 表示におけるケット $|\phi(t)\rangle$ は Schrödinger 方程式と呼ばれる式 (1 - 62) に従って時間発展してゆくことになる．非保存系では $\widehat{H}_S$ もまた時間の関数である点に注意しよう．ここで，作用素 $\widehat{U}(t, t')$ を

$$\widehat{U}(t, t') \equiv \widehat{\Phi}(t_0, t)\widehat{\Phi}(t_0, t')^\dagger = \widehat{\Phi}(t_0, t)\widehat{\Phi}(t', t_0) \tag{1-63}$$

で定義すれば，式 (1 - 58) によって

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= \widehat{\Phi}(t_0, t)|\phi\rangle = \widehat{\Phi}(t_0, t)\widehat{\Phi}(t_0, t')^\dagger\widehat{\Phi}(t_0, t')|\phi\rangle \\ &= \widehat{U}(t, t')|\phi(t')\rangle \end{aligned} \tag{1-64}$$

が成立する．つまり，$\widehat{U}(t, t')$ は Schrödinger 表示における系の状態 $|\phi(t)\rangle$ の時間的遷移を表現する作用素であり，状態遷移作用素と呼ばれる．$|\phi(t)\rangle$ が式 (1 - 62) に従うことから，状態遷移作用素 $\widehat{U}(t, t')$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}(t, t') = -i\widehat{H}_S(t)\widehat{U}(t, t'), \quad \widehat{U}(t', t') = \widehat{I} \tag{1-65}$$

の解となるはずだが，式 (1-54) によれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\widehat{U}(t,t') &= \frac{\partial\widehat{\Phi}(t_0,t)}{\partial t}\widehat{\Phi}(t_0,t')^{\dagger} \\
&= -i\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{H}(t)\widehat{\Phi}(t_0,t')^{\dagger} \\
&= -i\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{H}(t)\widehat{\Phi}(t,t_0)\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{\Phi}(t_0,t')^{\dagger} \\
&= -i\widehat{H}_S(t)\widehat{U}(t,t')
\end{aligned}
$$

であり，$\widehat{U}(t,t')$ は確かに式 (1-65) を満足する．また，式 (1-52), (1-53) からは

$$\widehat{U}(t,t') = \widehat{U}(t,t_1)\widehat{U}(t_1,t') \qquad (1\text{-}66)$$

$$\widehat{U}^{\dagger}(t,t') = \widehat{U}(t',t) = \widehat{U}(t,t')^{-1} \qquad (1\text{-}67)$$

が導かれる．式 (1-63) の定義から明らかなように $t' = t_0$ の場合には

$$\widehat{U}(t,t_0) = \widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{\Phi}(t_0,t_0)^{\dagger} = \widehat{\Phi}(t_0,t) = \widehat{\Phi}(t,t_0)^{\dagger} \qquad (1\text{-}68)$$

が成立し，式 (1-56) は

$$\widehat{F}_S = \widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{F}\widehat{\Phi}(t,t_0) = \widehat{U}(t,t_0)\widehat{F}\widehat{U}(t_0,t) \qquad (1\text{-}69)$$

と表現できる点に注意しておこう．

さて，今度は系の Hamiltonian $\widehat{H}$ が二つの項の和として

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_I \qquad (1\text{-}70)$$

のように表されたとする．$\widehat{H}_0, \widehat{H}_I$ 共に時間を陽に含むことを許すとしよう．系全体を二つに分け，$\widehat{H}_0$ は相互作用がない場合の Hamiltonian を，$\widehat{H}_I$ は部分系間の相互作用を表すようにするのが普通である．上述の $\widehat{\Phi}(t,t_0)$ に対応する作用素

$$
\left.
\begin{aligned}
\widehat{\Phi}_0(t,t_0) &= T\left[\exp\left(i\int_{t_0}^{t} d\tau\,\widehat{H}_0(\tau)\right)\right] \\
\widehat{\Phi}_I(t,t_0) &= T\left[\exp\left(i\int_{t_0}^{t} d\tau\,\widehat{H}_I(\tau)\right)\right]
\end{aligned}
\right\} \qquad (1\text{-}71)
$$

を導入し，任意の物理量 $\widehat{F}$，及びケット $|\phi\rangle$ に対して

$$\widehat{F}_I \equiv \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\widehat{F}\widehat{\Phi}_I(t,t_0), \quad |\phi_I(t)\rangle \equiv \widehat{\Phi}_I(t_0,t)|\phi\rangle \qquad (1\text{-}72)$$

を定義しよう．すると，式 (1-58) から式 (1-62) が導かれるのと同様にして相互作用 Hamiltonian に関する Schrödinger 方程式

$$i\frac{d}{dt}|\phi_I(t)\rangle = \widehat{H}_{I,I}|\phi(t)\rangle, \quad \widehat{H}_{I,I} \equiv \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\widehat{H}_I\widehat{\Phi}_I(t,t_0) \qquad (1\text{-}73)$$

が導かれる．また，式 (1 − 46) から式 (1 − 57) が導かれるように

$$\frac{d}{dt}\widehat{F}_I = \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}\widehat{\Phi}_I(t,t_0) + \frac{1}{i}[\widehat{F}_I,\widehat{H}_{0,I}]$$

$$\widehat{H}_{0,I} \equiv \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\widehat{H}_0\widehat{\Phi}_I(t,t_0) \qquad (1-74)$$

が導かれる．実際，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\widehat{F}_I &= \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\left\{\frac{1}{i}\widehat{H}_I\widehat{F} + \frac{\partial}{\partial t}\widehat{F} + \frac{1}{i}(\widehat{F}\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{F}) - \frac{1}{i}\widehat{F}\widehat{H}_I\right\}\widehat{\Phi}_I(t,t_0)\\ &= \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}\widehat{\Phi}_I(t,t_0) + \frac{1}{i}\widehat{\Phi}_I(t_0,t)[\widehat{F},\widehat{H}_0]\widehat{\Phi}_I(t,t_0)\\ &= \widehat{\Phi}_I(t_0,t)\frac{\partial\widehat{F}}{\partial t}\widehat{\Phi}_I(t,t_0) + \frac{1}{i}[\widehat{F}_I,\widehat{H}_{0,I}]\end{aligned}$$

である．任意のケット $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ と任意の物理量 $\widehat{F}$ に対して

$$\langle\psi|\widehat{F}|\phi\rangle = \langle\psi_I(t)|\widehat{F}_I|\phi_I(t)\rangle \qquad (1-75)$$

が成立することも言うまでもない．それゆえ Heisenberg 表示，Schrödinger 表示の他に $\widehat{F}_I$ と $|\phi_I(t)\rangle$ による第3の表示が可能であり，これを相互作用表示と称する．この表示では物理量 $\widehat{F}_I$ は相互作用のない場合の Hamiltonian $\widehat{H}_{0,I}$ に従って変化し，ケット $|\phi_I(t)\rangle$ は相互作用 Hamiltonian $\widehat{H}_{I,I}$ に従って時間発展する．

さて，$\widehat{\boldsymbol{q}} = (\widehat{q}_1,\widehat{q}_2,\cdots)$ や $\widehat{\boldsymbol{p}} = (\widehat{p}_1,\widehat{p}_2,\cdots)$ のように，時間に陽に依存しない可換な observable の完全な組 $\widehat{\boldsymbol{F}} = (\widehat{F}_1,\widehat{F}_2,\cdots)$ を考えよう．$\widehat{\boldsymbol{F}}$ が時間に陽に依存しないことから Schrödinger 表示における表現 $\widehat{\boldsymbol{F}}_S$ は時間に依存しないが，Heisenberg 表示では正準変数を介して時間に依存するので，これを明記して $\widehat{\boldsymbol{F}}(t) \equiv \widehat{\boldsymbol{F}}(\widehat{\boldsymbol{q}}(t),\widehat{\boldsymbol{p}}(t))$ と記す．式 (1 − 60) で示したように，$\widehat{\boldsymbol{F}}_S$ と $\widehat{\boldsymbol{F}}(t)$ は

$$\widehat{\boldsymbol{F}}(t) = \widehat{\Phi}(t,t_0)\widehat{\boldsymbol{F}}_S\widehat{\Phi}(t_0,t) = \widehat{\Phi}(t,t_0)\widehat{\boldsymbol{F}}(t_0)\widehat{\Phi}(t_0,t) \qquad (1-76)$$

で結ばれている．ここで $\widehat{\boldsymbol{F}}_S = \widehat{\boldsymbol{F}}(t_0)$ の同時固有ケットからなる正規直交基底を $\{|\boldsymbol{f},t_0\rangle\}$ とすれば，定義によって

$$\widehat{\boldsymbol{F}}(t_0)|\boldsymbol{f},t_0\rangle = \boldsymbol{f}|\boldsymbol{f},t_0\rangle \qquad (1-77)$$

が成立し，両辺の左から $\widehat{\Phi}(t,t_0)$ を作用させれば式 (1 − 76) によって

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(t,t_0)\widehat{\boldsymbol{F}}(t_0)|\boldsymbol{f},t_0\rangle &= \widehat{\Phi}(t,t_0)\widehat{\boldsymbol{F}}(t_0)\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{\Phi}(t,t_0)|\boldsymbol{f},t_0\rangle\\ &= \widehat{\boldsymbol{F}}(t)\widehat{\Phi}(t,t_0)|\boldsymbol{f},t_0\rangle = \widehat{\Phi}(t,t_0)\boldsymbol{f}|\boldsymbol{f},t_0\rangle = \boldsymbol{f}\widehat{\Phi}(t,t_0)|\boldsymbol{f},t_0\rangle\end{aligned}$$

を得る．つまり

$$|f,t\rangle \equiv \widehat{\Phi}(t,t_0)|f,t_0\rangle \tag{1-78}$$

は固有値 f に属する $\widehat{F}(t)$ の固有ケットであり[1)]，しかも式 (1–55) によって

$$\langle f',t|f,t\rangle = \langle f',t_0|\widehat{\Phi}(t,t_0)^\dagger\widehat{\Phi}(t,t_0)|f,t_0\rangle = \langle f',t_0|f,t_0\rangle$$

が成立するから $\{|f,t\rangle\}$ は正規直交基底を成す．言わば「Heisenberg 表示における observable $\widehat{F}(t)$ と共に動く正規直交基底」である．そして，式 (1–78) に示されるように，この動く基底の経時的な遷移を表現するのが $\widehat{\Phi}(t,t_0)$ である．こうした理由から，$\widehat{\Phi}(t,t_0)$ を基底遷移作用素と呼ぶことにしよう．

Schrödinger 表示では系の状態を表すケット $|\phi(t)\rangle$ が時間的に変化するが，このケットを固定した基底 $\{|f,t_0\rangle\}$ で展開した場合の展開係数 $\langle f,t_0|\phi(t)\rangle$ は波動関数と呼ばれ，$\phi_F(f,t)$ と記される．すなわち，

$$\phi_F(f,t) \equiv \langle f,t_0|\phi(t)\rangle \tag{1-79}$$

である．ところが，式 (1–78) と式 (1–58) によれば

$$\langle f,t|\phi\rangle = \langle f,t_0|\widehat{\Phi}(t_0,t)|\phi\rangle = \langle f,t_0|\phi(t)\rangle = \phi_F(f,t) \tag{1-80}$$

が成立することから，波動関数は Heisenberg 表示における固定されたケット $|\phi\rangle$ を動く正規直交基底 $\{|f,t\rangle\}$ で展開した場合の展開係数としても解釈できる．

1–5 Weyl 変換と逆変換

古典系の Hamiltonian $H(q,p,t)$ が与えられた場合，正準変数 q,p を対応する作用素 $\widehat{q},\widehat{p}$ で置き換えて量子系の Hamiltonian $\widehat{H}(\widehat{q},\widehat{p},t) = H(\widehat{q},\widehat{p},t)$ を得るのが正準量子化である[2)]．ところで，古典系では q,p の順序を交換しても Hamiltonian は不変だが，量子系では $\widehat{q},\widehat{p}$ の順序を変えれば異なる Hamiltonian を得るため，一つの古典系に無数の量子系が対応することになる．例えば 1 自由度の保存系 $H_1(q,p) = qp^2q$ と $H_2(q,p) = (q^2p^2 + p^2q^2)/2$ は古典系としては等価だが[3)]，$H_1(\widehat{q},\widehat{p})$ と $H_2(\widehat{q},\widehat{p})$ とは一致しない．どの量子系を対応させるべきか，つまり $H(q,p,t)$ における q,p の

---

1) 時刻 $t=t_0$ で $|f,t_0\rangle$ に一致する Schrödinger 表示のケットを $|\Psi(t)\rangle$ とすれば式 (1–58) によって

$$|\Psi(t)\rangle = \widehat{\Phi}(t_0,t)|\Psi(t_0)\rangle = \widehat{\Phi}(t_0,t)|f,t_0\rangle = [\widehat{\Phi}(t,t_0)]^{-1}|f,t_0\rangle$$

となる点に注意．つまり $|\Psi(t)\rangle$ は $|f,t\rangle$ とは「逆方向」に運動するのである．

2) 古典系の Hamiltonian $H(q,p,t)$ の q,p を $\widehat{q},\widehat{p}$ で置き換えて得られる $H(\widehat{q},\widehat{p},t)$ は作用素である．この作用素を $\widehat{H}$ で表し，$\widehat{H}$ が $\widehat{q},\widehat{p},t$ の関数であることを明示したのが $\widehat{H}(\widehat{q},\widehat{p},t)$ である．

3) $H_3(q,p) = q^2p^2$ も等価だが，$H_3(\widehat{q},\widehat{p})$ は Hermite ではなく量子系の Hamiltonian ではあり得ない．

順序をどのように設定すべきかは問題によって異なるが，経路積分を議論する際に便利なのは次節で定義する Weyl 順序である．経路積分では作用素 $\widehat{q}, \widehat{p}$ の関数を正準変数 q, p の関数と 1 対 1 に対応付ける Weyl 変換・逆変換が中心的な役割を演ずるが，$H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)$ が Weyl 順序にあればその Weyl 変換が $H(q, p, t)$ に一致するからである．以下，順を追って説明しよう．説明を簡便にするため作用素を q 数と呼び，通常の数（複素数）を c 数を呼ぶことにする[1]．

さて，$H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)$ は q 数だが，これを任意のブラケットで挟んだ $\langle\phi|H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)|\psi\rangle$ は c 数であり，

$$H_W(q, p, t) \equiv \int dv e^{ip\cdot v}\langle q - v/2|H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)|q + v/2\rangle \tag{1-81}$$

とすれば $H_W(q, p, t)$ は $H(q, p, t)$ と同じく q, p, t に依存する c 数関数となる．このとき $H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)$ から $H_W(q, p, t)$ への変換を Weyl 変換と呼び

$$H_W(q, p, t) = W[H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)]$$

などと略記する．式 (1-81) では $\widehat{q}$ の固有ケット $\{|q\rangle\}$ を介して Weyl 変換を定義したが，$\widehat{p}$ の固有ケットを使って

$$H_W(q, p, t) = \int du e^{iu\cdot q}\langle p + u/2|H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)|p - u/2\rangle \tag{1-82}$$

と表現することも可能である．実際，式 (1-81) と式 (1-43) によって

$$\begin{aligned}
&H_W(q, p, t)\\
&\quad = \int dp_1 dp_2 dv e^{ip\cdot v}\langle q - \frac{v}{2}|p_1\rangle\langle p_1|H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)|p_2\rangle\langle p_2|q + \frac{v}{2}\rangle\\
&\quad = \int dp_1 dp_2 \langle p_1|H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)|p_2\rangle e^{i(p_1 - p_2)\cdot q}\frac{1}{(2\pi)^N}\int dv e^{iv\cdot\{p - (p_1 + p_2)/2\}}\\
&\quad = \int dp_1 dp_2 \langle p_1|H(\widehat{q}, \widehat{p}, t)|p_2\rangle e^{i(p_1 - p_2)\cdot q}\delta\left(p - \frac{p_1 + p_2}{2}\right)
\end{aligned}$$

と変形できるが，変数変換

$$\begin{cases} p_1 - p_2 = u \\ p_1 + p_2 = 2v \end{cases} \iff \begin{cases} p_1 = v + u/2 \\ p_2 = v - u/2 \end{cases}$$

を施した後に v で積分すれば式 (1-82) を得る．同様にして式 (1-82) から式 (1-81) を導くことも可能だから，Weyl 変換の定義としてはどちらを使ってもよいことになる．

---

1) これも Dirac の命名である．q 数は “quantum number”，c 数は “common number” の意．

さて，式(*1*−*81*)で $v \leftrightarrow -v'$ と変数変換すれば

$$H_W(q,p,t) \equiv \int dv' e^{-ip\cdot v'} \langle q+v'/2|H(\widehat{q},\widehat{p},t)|q-v'/2\rangle$$

を得るが，この両辺に $e^{ip\cdot v}/(2\pi)^N$ を乗じて p で積分すれば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^N}\int dp e^{ip\cdot v} H_W(q,p,t)\\
&\quad = \int dv' \langle q+v'/2|H(\widehat{q},\widehat{p},t)|q-v'/2\rangle \frac{1}{(2\pi)^N}\int dp e^{ip\cdot(v-v')}\\
&\quad = \int dv' \langle q+v'/2|H(\widehat{q},\widehat{p},t)|q-v'/2\rangle \delta(v-v')\\
&\quad = \langle q+v/2|H(\widehat{q},\widehat{p},t)|q-v/2\rangle
\end{aligned}$$

が導かれる．ここで

$$\begin{cases} q+v/2 = q_f \\ q-v/2 = q_i \end{cases} \iff \begin{cases} q = (q_f+q_i)/2 = \overline{q} \\ v = q_f - q_i \end{cases}$$

と変数変換すれば

$$\langle q_f|H(\widehat{q},\widehat{p},t)|q_i\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N}\int dp e^{ip\cdot(q_f-q_i)} H_W(\overline{q},p,t), \quad \overline{q} \equiv \frac{q_f+q_i}{2} \tag{1-83}$$

が結論される．同様にして式(*1*−*82*)からは

$$\langle p_f|H(\widehat{q},\widehat{p},t)|p_i\rangle = \frac{1}{(2\pi)^N}\int dq e^{-iq\cdot(p_f-p_i)} H_W(q,\overline{p},t), \quad \overline{p} \equiv \frac{p_f+p_i}{2} \tag{1-84}$$

が導かれる．いわゆる「中点処方」が基礎とするのはこれらの関係式である．

ここで，c 数 q, p に依存する q 数 $\widehat{\Delta}(q,p)$ を

$$\widehat{\Delta}(q,p) \equiv \int dv e^{ip\cdot v} |q+v/2\rangle\langle q-v/2| \tag{1-85}$$

で定義すれば，任意の $|p_i\rangle, |p_f\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle p_f|\widehat{\Delta}(q,p)|p_i\rangle &= \int dv e^{ip\cdot v}\langle p_f|q+v/2\rangle\langle q-v/2|p_i\rangle\\
&= e^{-iq\cdot(p_f-p_i)}\frac{1}{(2\pi)^N}\int dv e^{iv\cdot\{p-(p_f+p_i)/2\}}\\
&= e^{-iq\cdot(p_f-p_i)}\delta\left(p-\frac{p_f+p_i}{2}\right)
\end{aligned}$$

であり，従って

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{p}_f|\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}H_W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\widehat{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})|\boldsymbol{p}_i\rangle \\
&\quad=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}H_W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\langle \boldsymbol{p}_f|\widehat{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})|\boldsymbol{p}_i\rangle \\
&\quad=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}H_W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)}\delta\left(\boldsymbol{p}-\frac{\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{p}_i}{2}\right) \\
&\quad=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{q}H_W(\boldsymbol{q},\overline{\boldsymbol{p}},t)e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)}=\langle \boldsymbol{p}_f|H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}_i\rangle
\end{aligned}$$

が成立しなければならない（最後の変形には式 (1-84) を利用した）．それゆえ，

$$H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}H_W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\widehat{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \tag{1-86}$$

が成立する．Weyl 変換によって得られた c 数関数 $H_W(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ を元の q 数関数 $H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)$ に引き戻すこの変換は Weyl 逆変換と呼ばれる．式 (1-85) では $\boldsymbol{q}$ の固有ケットを介して $\widehat{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ を定義したが，$\widehat{\boldsymbol{p}}$ の固有ケットを使って定義することも可能である．実際，式 (1-81) から式 (1-82) を導いたのと同様にして

$$\widehat{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\int d\boldsymbol{u}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{u}/2\rangle\langle\boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}/2| \tag{1-87}$$

を得る．あるいは $\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}$ の対称性が明確に示された形式

$$\widehat{\Delta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{v}e^{i\{\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{q}-\hat{\boldsymbol{q}})+\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{p}-\hat{\boldsymbol{p}})\}} \tag{1-88}$$

で定義してもよい．これを示そう．まず，Baker-Campbell-Hausdorff の公式[1)]

$$\begin{aligned}
e^{\widehat{X}}e^{\widehat{Y}}=\exp\Big\{&\widehat{X}+\widehat{Y}+\frac{1}{2}[\widehat{X},\widehat{Y}] \\
&+\frac{1}{12}([\widehat{X},[\widehat{X},\widehat{Y}]]+[\widehat{Y},[\widehat{Y},\widehat{X}]])+\cdots\Big\}
\end{aligned} \tag{1-89}$$

で $\widehat{X}=\alpha\widehat{q}_n$, $\widehat{Y}=\beta\widehat{p}_n$ とすれば $[\widehat{X},\widehat{Y}]=\alpha\beta[\widehat{q}_n,\widehat{p}_n]=i\alpha\beta$ が c 数だから

$$\exp(\alpha\widehat{q}_n)\exp(\beta\widehat{p}_n)=\exp\left(\frac{1}{2}i\alpha\beta\right)\exp(\alpha\widehat{q}_n+\beta\widehat{p}_n) \tag{1-90}$$

が成立し，従って

$$\begin{aligned}
e^{i\{u_n(q_n-\hat{q}_n)+v_n(p_n-\hat{p}_n)\}}&=e^{i(u_nq_n+v_np_n)}e^{(-iu_n)\hat{q}_n+(-iv_n)\hat{p}_n} \\
&=e^{i(u_nq_n+v_np_n+u_nv_n/2)}e^{-iu_n\hat{q}_n}e^{-iv_n\hat{p}_n}
\end{aligned}$$

1) 章末の演習問題 2 参照．

が導かれるが，異なる添え字を持つ作用素が可換であることから

$$e^{i\{u\cdot(q-\hat{q})+v\cdot(p-\hat{p})\}}=\prod_{n=1}^{N}e^{i\{u_n(q_n-\hat{q}_n)+v_n(p_n-\hat{p}_n)\}}$$
$$=\prod_{n=1}^{N}e^{i(u_nq_n+v_np_n+u_nv_n/2)}e^{-iu_n\hat{q}_n}e^{-iv_n\hat{p}_n}$$
$$=e^{i(u\cdot q+v\cdot p+u\cdot v/2)}e^{-iu\cdot\hat{q}}e^{-iv\cdot\hat{p}}$$

が言える．それゆえ，任意の $|p_i\rangle$, $|p_f\rangle$ に対して

$$\langle p_f|\frac{1}{(2\pi)^N}\int dudve^{i\{u\cdot(q-\hat{q})+v\cdot(p-\hat{p})\}}|p_i\rangle$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int dudvdq'e^{i(u\cdot q+v\cdot p+u\cdot v/2)}\langle p_f|e^{-iu\cdot\hat{q}}|q'\rangle\langle q'|e^{-iv\cdot\hat{p}}|p_i\rangle$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int dudve^{iq\cdot u}e^{iv\cdot(p-p_i+u/2)}\delta(u-(p_i-p_f))$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^N}\int dve^{iq\cdot(p_i-p_f)}e^{iv\cdot(p-\bar{p})}=\int dve^{ip\cdot v}\frac{e^{-i(q+v/2)\cdot p_f}}{(2\pi)^{N/2}}\frac{e^{i(q-v/2)\cdot p_i}}{(2\pi)^{N/2}}$$
$$=\langle p_f|\left\{\int dve^{ip\cdot v}|q+v/2\rangle\langle q-v/2|\right\}|p_i\rangle=\langle p_f|\widehat{\Delta}(q,p)|p_i\rangle$$

が成立しなければならず，式(*1−88*)が結論される．

1−6 Weyl順序

まず簡単な例として1次元調和振動子のHamiltonian

$$H_1(q,p)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}q^2\Rightarrow H_1(\widehat{q},\widehat{p})=\frac{1}{2}\widehat{p}^2+\frac{1}{2}\widehat{q}^2$$

を考えよう．Weyl変換は線形だから

$$H_{1,W}(q,p)=W[H_1(\widehat{q},\widehat{p})]=\frac{1}{2}W[\widehat{p}^2]+\frac{1}{2}W[\widehat{q}^2]$$

が成立するが，$W[\widehat{q}^2]$ は式(*1−81*)によって

$$W[\widehat{q}^2]=\int dve^{ipv}\langle q-v/2|\widehat{q}^2|q+v/2\rangle$$
$$=\int dve^{ipv}(q+v/2)^2\langle q-v/2|q+v/2\rangle$$

$$= \int dv e^{ipv}(q+v/2)^2\delta(v) = q^2$$

と計算され，同様に式(1−82)によって $W[\widehat{p}^2] = p^2$ が示されるので

$$H_{1,W}(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 = H_1(q,p)$$

が結論される．つまり $H_1(\widehat{q},\widehat{p})$ はWeyl変換によって形を変えない．一方，

$$H_2(q,p) = pq^2 \Rightarrow H_2(\widehat{q},\widehat{p}) = \widehat{pq^2}$$

の場合には $H_{2,W}(q,p) \neq H_2(q,p)$ である．実際，

$$\begin{aligned}
H_{2,W}(q,p) = W[H_2(\widehat{q},\widehat{p})] &= \int dv e^{ipv}\langle q-v/2|\widehat{pq^2}|q+v/2\rangle \\
&= \int dv dp' e^{ipv} p'(q+v/2)^2\langle q-v/2|p'\rangle\langle p'|q+v/2\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int dv dp' e^{ipv}\left(q+\frac{v}{2}\right)^2 p' e^{-ip'v} \\
&= i\int dv e^{ipv}\left(q+\frac{v}{2}\right)^2 \frac{d}{dv}\left\{\frac{1}{2\pi}\int dp' e^{-ip'v}\right\} \\
&= i\int dv e^{ipv}\left(q+\frac{v}{2}\right)^2 \frac{d}{dv}\delta(v) \\
&= -i\frac{d}{dv}e^{ipv}\left(q+\frac{v}{2}\right)^2\bigg|_{v=0} = H_2(q,p) - iq
\end{aligned}$$

であり，右辺には余分な項 $-iq$ がある．では，どのような場合に $H_W = H$ が成立するのだろうか．

まず $\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})$ のWeyl変換を考えると，式(1−90)によって

$$\begin{aligned}
W[e^{\alpha\hat{q}+\beta\hat{p}}] &= W[e^{-i\alpha\beta/2}e^{\alpha\hat{q}}e^{\beta\hat{p}}] \\
&= e^{-i\alpha\beta/2}\int du e^{iqu}\langle p+u/2|e^{\alpha\hat{q}}e^{\beta\hat{p}}|p-u/2\rangle \\
&= e^{-i\alpha\beta/2}\int du dq' e^{iqu}\langle p+u/2|e^{\alpha\hat{q}}|q'\rangle\langle q'|e^{\beta\hat{p}}|p-u/2\rangle \\
&= e^{-i\alpha\beta/2}\int du dq' e^{iqu}\frac{e^{-i(p+u/2)q'}}{\sqrt{2\pi}}e^{\alpha q'}\frac{e^{iq'(p-u/2)}}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta(p-u/2)} \\
&= e^{-i\alpha\beta/2}e^{\beta p}\int dq' e^{\alpha q'}\delta(q'-(q+i\beta/2))
\end{aligned}$$

$$= e^{-i\alpha\beta/2} e^{\beta p} e^{\alpha(q+i\beta/2)} = e^{\alpha q+\beta p}$$

が成立するから，$\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})$ は Weyl 変換によって形を変えない．つまり

$$W[\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})] = \exp(\alpha q+\beta p) \tag{1-91}$$

である．この性質を利用して $\widehat{q},\widehat{p}$ の単項式に対する Weyl 順序を

$$\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W \equiv \left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})\right)\bigg|_{\alpha=\beta=0} \tag{1-92}$$

で定義すれば，

$$\begin{aligned} W[\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W] &= \left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}W[\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})]\right)\bigg|_{\alpha=\beta=0} \\ &= \left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}\exp(\alpha q+\beta p)\right)\bigg|_{\alpha=\beta=0} = q^n p^m \end{aligned} \tag{1-93}$$

が成立する．従って，$H(\widehat{q},\widehat{p},t)$ が Weyl 順序単項式の和として

$$H(\widehat{q},\widehat{p},t) = \sum_{n,m} H_{nm}(t)\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W$$

と表現されていたとすれば $H(\widehat{q},\widehat{p},t)$ は Weyl 変換によって形を変えない．つまり

$$\begin{aligned} H_W(q,p,t) = W[H(\widehat{q},\widehat{p},t)] &= \sum_{n,m} H_{nm}(t)W[\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W] \\ &= \sum_{n,m} H_{nm}(t)q^n p^m = H(q,p,t) \end{aligned}$$

である．ところで，$(\widehat{q}^k,\widehat{p}^l)$ を

$$(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})^n = \sum_{k+l=n,0\le k,l\le n} \frac{\alpha^k\beta^l n!}{k!l!}(\widehat{q}^k,\widehat{p}^l) \tag{1-94}$$

が満足されるように定義すれば

$$\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n,0\le k,l\le n}\frac{\alpha^k\beta^l}{k!l!}(\widehat{q}^k,\widehat{p}^l)$$

が成立し，これを式 (1-92) に代入すれば

$$\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W = \left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})\right)\bigg|_{\alpha=\beta=0} = (\widehat{q}^n,\widehat{p}^m) \tag{1-95}$$

を得る．式 (1-92) を直接に計算するよりは式 (1-94) を使った方が簡単である．例

えば

$$(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})^3=\alpha^3\widehat{q}^3+\alpha^2\beta(\widehat{q}^2\widehat{p}+\widehat{qpq}+\widehat{pq}^2)+\alpha\beta^2(\widehat{qp}^2+\widehat{pqp}+\widehat{p}^2\widehat{q})+\beta^3\widehat{p}^3$$

だから

$$(\widehat{q}^3,\widehat{p}^0)=\widehat{q}^3,\quad (\widehat{q}^2,\widehat{p}^1)=(\widehat{q}^2\widehat{p}+\widehat{qpq}+\widehat{pq}^2)/3,$$
$$(\widehat{q}^1,\widehat{p}^2)=(\widehat{qp}^2+\widehat{pqp}+\widehat{p}^2\widehat{q})/3,\quad (\widehat{q}^0,\widehat{p}^3)=\widehat{p}^3$$

となる．

さて，前述の $H_2(q,p)=pq^2$ を考えよう．量子系の Hamiltonian を $H_2(\widehat{q},\widehat{p})=\widehat{pq}^2$ としたのでは $H_{2,W}(q,p)\neq H_2(q,p)$ である．そこで，$\widehat{pq}^2$ を

$$\{\widehat{q}^2\widehat{p}^1\}_W=(\widehat{q}^2,\widehat{p}^1)=(\widehat{q}^2\widehat{p}+\widehat{qpq}+\widehat{pq}^2)/3$$

で置き換える．古典系では pq^2 を $(q^2p+qpq+pq^2)/3$ で置き換えても何も変化しないが，量子系では $\widehat{pq}^2$ を $\{\widehat{q}^2\widehat{p}^1\}_W$ に置き換えることによって実質的に変化し，後者だけが Weyl 変換不変となるのである．

この手法を一般の古典系 Hamiltonian $H(q,p,t)$ に適用するのは容易である．つまり $H(q,p,t)$ を q,p のべき級数に展開して

$$H(q,p,t)=\sum_{n_1,m_1,\cdots,n_N,m_N}H_{n_1,m_1,\cdots,n_N,m_N}(t)q_1^{n_1}p_1^{m_1}\cdots q_N^{n_N}p_N^{m_N} \tag{1-96}$$

と表現し，各単項式 $q_k^{n_k}p_k^{m_k}$ を $\{q_k^{n_k}p_k^{m_k}\}_W$ に書き換えれば良い．ただし $\{q_k^{n_k}p_k^{m_k}\}_W$ とは $\{\widehat{q}_k^{n_k}\widehat{p}_k^{m_k}\}_W$ における $\widehat{q}_k,\widehat{p}_k$ をそのまま q_k,p_k で置き換えたものである．ここで

$$W[\{\widehat{q}_k^{n_k}\widehat{p}_k^{m_k}\}_W\{\widehat{q}_l^{n_l}\widehat{p}_l^{m_l}\}_W]=\{q_k^{n_k}p_k^{m_k}\}_W\{q_l^{n_l}p_l^{m_l}\}_W\quad(k\neq l) \tag{1-97}$$

が成立する点に注意しよう．

また，Weyl 順序に従えば Helmite 性が自動的に満足される点にも注意する必要がある．実際，式 $(1-92)$ において α,β 実数であることから

$$(\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W)^\dagger=\left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}\exp(\alpha\widehat{q}^\dagger+\beta\widehat{p}^\dagger)\right)\Bigg|_{\alpha=\beta=0}$$
$$=\left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n}\frac{\partial^m}{\partial\beta^m}\exp(\alpha\widehat{q}+\beta\widehat{p})\right)\Bigg|_{\alpha=\beta=0}=\{\widehat{q}^n\widehat{p}^m\}_W$$

が成立する．多自由度系でも全く同様である．

演習問題

1. $f(a)=f(b)=0$ を満足し，区間 $[a,b]$ 上で二乗可積分な関数 f の集合を S とすれば，このStは

$$(f,g)\equiv\int_a^b dx f^*(x)g(x)$$

で定義される内積に関して Hilbert 空間を成すことが知られている．$\widehat{p}\equiv id/dx$ は S 上の Hermite 作用素であり，非有界であることを示せ．

2. $[\widehat{X},[\widehat{X},\widehat{Y}]]=[[\widehat{X},\widehat{Y}],\widehat{Y}]=\widehat{0}$ を満足する作用素 $\widehat{X}$, $\widehat{Y}$ に対して

$$\exp(\widehat{X})\exp(\widehat{Y})=\exp(\widehat{X}+\widehat{Y}+\frac{1}{2}[\widehat{X},\widehat{Y}])$$

が成立することを示せ．これは Baker–Campbell–Hausdorff の公式の特殊な場合である．$[\widehat{q},\widehat{p}]=i\widehat{I}$ を満足する正準変数 $\widehat{q}$, $\widehat{p}$ は $[\widehat{q},[\widehat{q},\widehat{p}]]=[[\widehat{q},\widehat{p}],\widehat{p}]=\widehat{0}$ をもまた満足する点に注意せよ．

3. 一般化 Weyl 変換を

$$H_w^{\xi}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=W^{\xi}[H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)]\equiv\int d\boldsymbol{v}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}\langle\boldsymbol{q}-\xi\boldsymbol{v}|H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{q}+\eta\boldsymbol{v}\rangle$$

$$\eta\equiv 1-\xi \tag{a}$$

として定義する．$\xi=1/2$ の場合が通常の Weyl 変換である．このとき

$$\langle\boldsymbol{q}_f|H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{q}_i\rangle=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{p}e^{i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}_f-\boldsymbol{q}_i)}H_W^{\xi}(\overline{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{p})$$

$$\overline{\boldsymbol{q}}\equiv\eta\boldsymbol{q}_f+\xi\boldsymbol{q}_i$$

$$\langle\boldsymbol{p}_f|H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}_i\rangle=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{q}e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)}H_W^{\xi}(\boldsymbol{q},\overline{\boldsymbol{p}})$$

$$\overline{\boldsymbol{p}}\equiv\eta\boldsymbol{p}_f+\xi\boldsymbol{p}_i \tag{b}$$

が成立することを示せ (これを利用すれば中点処方以外の方法で経路積分を定式化することも可能である)．また，

$$\widehat{\Delta}^{\xi}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\equiv\int d\boldsymbol{v}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}}|\boldsymbol{q}+\eta\boldsymbol{v}\rangle\langle\boldsymbol{q}-\xi\boldsymbol{v}|=\int d\boldsymbol{u}e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}}|\boldsymbol{p}-\xi\boldsymbol{u}\rangle\langle\boldsymbol{p}-\eta\boldsymbol{u}| \tag{c}$$

を使えば式 (a) の逆変換が

$$H(\widehat{\boldsymbol{q}},\widehat{\boldsymbol{p}},t)=\frac{1}{(2\pi)^N}\int d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{p}H_W^{\xi}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\widehat{\Delta}^{\xi}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \tag{d}$$

として与えられることを示せ．

第2章
経路積分

量子系の時間発展を記述するには observable の運動を支配する Heisenberg 方程式を使ってもよく，状態ベクトルの経時変化を規定する Schrödinger 方程式を採用しても良い．あるいは異なる時刻の状態ベクトルを対応付ける Green 関数に注目するのも一法である．特に，時刻の差が無限小の場合には Green 関数は量子系 Hamiltonian の 1 次関数となり，Weyl 変換を介して古典系の Hamiltonian で表現される．有限時間の Green 関数は無限小時間の Green 関数の積み重ねに過ぎないことから，量子系の時間発展が古典系の Hamiltonian で記述されることになる．これが経路積分の最大の特徴であり，量子系を古典系のアナロジーで理解するための手段を与える．

2-1 時間発展 Green 関数

1-4 節後半の議論を思い起こそう．そこでは $\widehat{\boldsymbol{q}} = (\widehat{q}_1, \widehat{q}_2, \cdots)$ や $\widehat{\boldsymbol{p}} = (\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \cdots)$ のように時間に陽に依存しない可換な observable の完全な組 $\widehat{\boldsymbol{F}} = (\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, \cdots)$ を考え，$\widehat{\boldsymbol{F}}_S = \widehat{\boldsymbol{F}}(t_0)$ の同時固有ケットからなる正規直交基底 $\{|\boldsymbol{f}, t_0\rangle\}$ を介して動く基底 $\{|\boldsymbol{f}, t\rangle\}$ を定義し，Heisenberg 表示における固定されたケット $|\phi\rangle$ の $\{|\boldsymbol{f}, t\rangle\}$ に関する展開係数が波動関数に一致することを示したのであった．この性質を利用すれば，時刻 t における波動関数 $\phi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}, t)$ が別の時刻 t' における波動関数 $\phi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}, t')$ を使って表現できる．実際，式 (1 − 80) によれば

$$\begin{aligned}\phi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}, t) = \langle \boldsymbol{f}, t|\phi\rangle &= \int d\boldsymbol{f}' \langle \boldsymbol{f}, t|\boldsymbol{f}', t'\rangle\langle \boldsymbol{f}', t'|\phi\rangle \\ &= \int d\boldsymbol{f}' \langle \boldsymbol{f}, t|\boldsymbol{f}', t'\rangle \phi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}', t')\end{aligned}$$

であり

$$G_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}, t; \boldsymbol{f}', t') \equiv \langle \boldsymbol{f}, t|\boldsymbol{f}', t'\rangle = \langle \boldsymbol{f}, t_0|\widehat{\Phi}(t_0, t)\widehat{\Phi}(t', t_0)|\boldsymbol{f}', t_0\rangle \qquad (2-1)$$

で定義される時間発展 Green 関数を使って

$$\phi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}, t) = \int d\boldsymbol{f}' G_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}, t; \boldsymbol{f}', t')\phi_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{f}', t') \qquad (2-2)$$

と書ける．また，

$$\begin{aligned}\langle f,t|f',t'\rangle &= \int df''\langle f,t|f'',t''\rangle\langle f'',t''|f',t'\rangle \\ &= \int df'' G_F(f,t;f'',t'')G_F(f'',t'';f',t')\end{aligned}$$

すなわち

$$G_F(f,t;f',t') = \int df'' G_F(f,t;f'',t'')G_F(f'',t'';f',t') \tag{2-3}$$

が成立する．つまり，時刻 t' で状態 $|f'\rangle$ を出発した系が時刻 t'' で中間状態 $|f''\rangle$ にある確率振幅 $G_F(f'',t'';f',t')$ を時刻 t'' で中間状態 $|f''\rangle$ を経由して時刻 t に状態 $|f\rangle$ に至る確率振幅 $G_F(f,t;f'',t'')$ に乗じ，全ての可能な中間状態に関して加えあわせたものが $G_F(f,t;f',t')$ となるのである．

保存系では式 (1－50) が成立するから式 (2－1) の右辺は

$$\begin{aligned}&\langle f,t_0|\exp(i\widehat{H}(t_0-t))\exp(i\widehat{H}(t'-t_0))|f',t_0\rangle \\ &\quad= \langle f,t_0|\exp(-i\widehat{H}(t-t'))|f',t_0\rangle\end{aligned}$$

となり，t と t' は両者の差 $t-t'$ のみを介して時間発展 Green 関数に関与する．このため，保存系では $G_F(f,t;f',t')$ の代りに $G_F(f,f';t-t')$ と記すのが普通である．

$$G_F(f,f';t-t') = \langle f,t_0|\exp(-i\widehat{H}(t-t'))|f',t_0\rangle \tag{2-4}$$

一例として Hamiltonian

$$H(q,p) = p^2/2m \Longrightarrow \widehat{H} \equiv H(\widehat{q},\widehat{p}) = \widehat{p}^2/2m \tag{2-5}$$

で記述される1次元自由粒子を考える．$\widehat{H}$ が運動量 $\widehat{p}$ だけを含むことから $\widehat{p}$ の固有ケットからなる正規直交基底 $\{|p\rangle\}$ で展開するのが自然であり[1)]，この系が保存系であることから時間発展 Green 関数は式 (2－4) から

$$\begin{aligned}G_p(p,p';t) &= \langle p|\exp(-i\widehat{H}t)|p'\rangle = \langle p|\exp(-i\widehat{p}^2t/2m)|p'\rangle \\ &= \exp(-ip^2t/2m)\langle p|p'\rangle \\ &= \exp(-ip^2t/2m)\delta(p-p')\end{aligned} \tag{2-6}$$

として計算される．従って式 (2－2) は

$$\phi_p(p,t) = \int dp' G_p(p,p';t)\phi_p(p',0) = \exp(-ip^2t/2m)\phi_p(p,0) \tag{2-7}$$

---

1)　$\{|p\rangle\}$ が時刻0における運動量作用素 $\widehat{p}(0)$ の固有ベクトルからなる正規直交基底 $\{|p,0\rangle\}$ を意味することは言うまでもない．

となる．一方，$\widehat{q}$ の固有ベクトルからなる正規直交基底 $\{|q\rangle\}$ で展開すれば

$$G_q(q,q';t)=\langle q|\exp\left(\frac{-i\widehat{p}^2t}{2m}\right)|q'\rangle=\int dp\langle q|\exp\left(\frac{-i\widehat{p}^2t}{2m}\right)|p\rangle\langle p|q'\rangle$$

$$=\int dp\exp\left(\frac{-ip^2t}{2m}\right)\langle q|p\rangle\langle p|q'\rangle$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int dp\exp\left(\frac{-ip^2t}{2m}+ip(q-q')\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{im(q-q')^2}{2t}\right)\int dp\exp\left\{\frac{-it}{2m}\left(p-\frac{m(q-q')}{t}\right)^2\right\}$$

となるが，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\exp(-\alpha x^2)=\sqrt{\pi/\alpha}\quad(\mathrm{Re}\alpha\geq 0,\alpha\neq 0) \tag{2-8}$$

を利用すれば次式を得る．

$$G_q(q,q';t)=\sqrt{\frac{m}{2\pi it}}\exp\left(\frac{im(q-q')^2}{2t}\right) \tag{2-9}$$

2-2　位相空間における経路積分

ここでは位置演算子 $\widehat{q}$ に関する時間発展 Green 関数 G_q を考えることにし，特に必要な場合を別にして添え字 “q” は省略して単に G と記すことにする[1)]．また，初期時刻 t' を t_I，最終時刻 t を t_F と書き換え，初期状態と最終状態をそれぞれ q_I, q_F で指定することにすれば，式 (2-3) は

$$G(q_F,t_F;q_I,t_I)=\int dqG(q_F,t_F;q,t)G(q,t;q_I,t_I) \tag{2-10}$$

と書ける．ここで t は任意の時刻であり，q は時刻 t における状態（座標値）を表す．時間区間 $[t_I,t_F]$ 内にサンプル時刻 $t_1,t_2,\cdots,t_{R-1}$ を設定して式 (2-10) を繰り返し適用すれば，$t_R=t_F$ として

$$\begin{aligned}G(q_F,t_F;q_I,t_I)&=\int\prod_{r=1}^{R-1}dq_rG(q_{r+1},t_{r+1};q_r,t_r)G(q_1,t_1;q_I,t_I)\\&=\int\prod_{r=0}^{R-1}dq_rG(q_{r+1},t_{r+1};q_r,t_r)\delta(q_0-q_I)\end{aligned} \tag{2-11}$$

1)　もちろん運動量演算子に関する Green 関数でも同様の議論が可能である．原理的には任意の物理量に関する Green 関数を用いても良いはずだが，実際の計算は容易ではない．

を得る．時刻 $t_0 = t_I$ で $\boldsymbol{q}_0 = \boldsymbol{q}_I$ を出発し，途中の時刻 t_1 では $\boldsymbol{q}_1$，t_2 では $\boldsymbol{q}_2, \cdots, t_{R-1}$ では $\boldsymbol{q}_{R-1}$ を経由し，最終的に時刻 $t_R = t_F$ で $\boldsymbol{q}_R \equiv \boldsymbol{q}_F$ に至る確率振幅を全ての経路（全ての経由点 $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_{R-1}$ の組み合わせ）に関して加え合わせれば t_I から t_F に至る時間発展 Green 関数 $G(\boldsymbol{q}_F, t_F; \boldsymbol{q}_I, t_I)$ を得る，というのが式 (2-11) の意味である．

経路積分は式 (2-11) で最大刻み

$$\varepsilon_{\max} \equiv \max_{r=0\sim R-1} \varepsilon_r, \quad \varepsilon_r \equiv t_{r+1} - t_r \tag{2-12}$$

が零となるように $R \to \infty$ とした極限として定義される．このとき時間刻み ε_r は無限小となるので，まずは微小時間での Green 関数 $G(\boldsymbol{q}_{r+1}, t_{r+1}; \boldsymbol{q}_r, t_r)$ を評価しておこう．ε_r に関する 2 次以上の項を無視すれば式 (1-51) は

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(t_{r+1}, t_r) &= T\left[\exp\left\{i\int_{t_r}^{t_{r+1}} d\tau \widehat{H}(\tau)\right\}\right] \\ &\cong \boldsymbol{I} + i\int_{t_r}^{t_{r+1}} d\tau \widehat{H}(\tau) \cong \boldsymbol{I} + i\varepsilon_r \widehat{H}(t_r)\end{aligned} \tag{2-13}$$

と書け，それゆえ

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{q}_{r+1}, t_{r+1}; \boldsymbol{q}_r, t_r) &= \langle \boldsymbol{q}_{r+1}, t_0 | \widehat{\Phi}(t_0, t_{r+1}) \widehat{\Phi}(t_r, t_0) | \boldsymbol{q}_r, t_0 \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{q}_{r+1}, t_0 | \widehat{\Phi}(t_0, t_r) \widehat{\Phi}(t_r, t_{r+1}) \widehat{\Phi}(t_r, t_0) \rangle | \boldsymbol{q}_r, t_0 \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{q}_{r+1}, t_r | \widehat{\Phi}(t_{r+1}, t_r)^\dagger | \boldsymbol{q}_r, t_r \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{q}_{r+1}, t_r | \{\boldsymbol{I} - i\varepsilon_r \widehat{H}(t_r)\} | \boldsymbol{q}_r, t_r \rangle \\ &= \delta(\boldsymbol{q}_{r+1} - \boldsymbol{q}_r) - i\varepsilon_r \langle \boldsymbol{q}_{r+1}, t_r | \widehat{H}(t_r) | \boldsymbol{q}_r, t_r \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\boldsymbol{p}_r e^{i\boldsymbol{p}_r \cdot (\boldsymbol{q}_{r+1} - \boldsymbol{q}_r)} \{1 - i\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{q}}_r, \boldsymbol{p}_r, t_r)\} \\ \overline{\boldsymbol{q}}_r &\equiv (\boldsymbol{q}_{r+1} + \boldsymbol{q}_r)/2\end{aligned} \tag{2-14}$$

と近似できる．ただし $\widehat{H}(t_r) \equiv H(\widehat{q}(t_r), \widehat{p}(t_r), t_r)$ が Weyl 順序にあるとし，$|\boldsymbol{q}_r, t_r\rangle$ が時刻 t_r における作用素 $\widehat{\boldsymbol{q}}(t_r)$ の固有ケットであることから，式 (1-83) により

$$\begin{aligned}&\langle \boldsymbol{q}_{r+1}, t_r | H(\widehat{\boldsymbol{q}}(t_r), \widehat{\boldsymbol{p}}(t_r), t_r) | \boldsymbol{q}_r, t_r \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int d\boldsymbol{p}_r \exp\{i\boldsymbol{p}_r \cdot (\boldsymbol{q}_{r+1} - \boldsymbol{q}_r)\} H(\overline{\boldsymbol{q}}_r, \boldsymbol{p}_r, t_r)\end{aligned} \tag{2-15}$$

が成立することを利用した．ここで再び ε_r が小さいことを利用して式 (2-14) 最右

辺の $1-i\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{q}}_r,\boldsymbol{p}_r,t_r)$ を $\exp[-i\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{q}}_r,\boldsymbol{p}_r,t_r)]$ で近似すれば

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{q}_{r+1},t_{r+1};\boldsymbol{q}_r,t_r)\\
&\quad\cong (1/2\pi)^N\int d\boldsymbol{p}_r \exp\{i\boldsymbol{p}_r\cdot(\boldsymbol{q}_{r+1}-\boldsymbol{q}_r)\}\exp\{-i\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{q}}_r,\boldsymbol{p}_r,t_r)\}\\
&\quad= (1/2\pi)^N\int d\boldsymbol{p}_r \exp\{i[\boldsymbol{p}_r\cdot(\boldsymbol{q}_{r+1}-\boldsymbol{q}_r)-\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{q}}_r,\boldsymbol{p}_r,t_r)]\}\\
&\quad= (1/2\pi)^N\int d\boldsymbol{p}_r \exp\{i\varepsilon_r \widetilde{L}_r) \qquad (2\text{-}16)
\end{aligned}$$

を得る．ただし $\widetilde{L}_r$ は

$$\widetilde{L}_r \equiv \boldsymbol{p}_r\cdot(\boldsymbol{q}_{r+1}-\boldsymbol{q}_r)/\varepsilon_r - H(\overline{\boldsymbol{q}}_r,\boldsymbol{p}_r,t_r) \qquad (2\text{-}17)$$

として定義され，$R\to\infty(\varepsilon_{\max}\to 0)$ の極限で

$$\lim_{R\to\infty}\widetilde{L}_r = \boldsymbol{p}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(t) - H(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t),t) \qquad (2\text{-}18)$$

に収束する．ここでは $\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t)$ は互いに独立な任意関数であるが，運動量 $\boldsymbol{p}$ を系の Lagrangian $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ によって $\boldsymbol{p}=\partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ として与えればこの関係式によって式 (2-18) の右辺は $\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ の関数となる．実はその関数とは系の Lagrangian に他ならない．式 (2-18) の右辺は $\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t)$ の関数として与えられているから Lagrangian そのものではないが，それに類似の量である．式 (2-17) の右辺を略記するための記号として $\widetilde{L}_r$ を選んだ理由はここにある[1)]．

さて，式 (2-16) を式 (2-11) に代入すれば

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{q}_F,t_F;\boldsymbol{q}_I,t_I)\\
&\quad=\lim_{R\to\infty}\int\prod_{r=0}^{R-1}d\boldsymbol{q}_r\int\frac{d\boldsymbol{p}_r}{(2\pi)^N}\exp(i\varepsilon_r\widetilde{L}_r)\delta(\boldsymbol{q}_0-\boldsymbol{q}_I)\\
&\quad=\lim_{R\to\infty}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\frac{d\boldsymbol{q}_r d\boldsymbol{p}_r}{(2\pi)^N}\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r\widetilde{L}_r\right)\delta(\boldsymbol{q}_0-\boldsymbol{q}_I) \qquad (2\text{-}19)
\end{aligned}$$

を得る．ところが $R\to\infty$ とすれば

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r\widetilde{L}_r = \widetilde{A}[\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}] \equiv \int_{t_I}^{t_F}dt[\boldsymbol{p}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(t)-H(\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t),t)] \qquad (2\text{-}20)$$

が成立することから，式 (2-19) を形式的に

1) 一方「Lagrangian そのもの」に対応する量が後ほど導入され，それには L_r なる記号を用いる．

$$G(\boldsymbol{q}_F, t_F; \boldsymbol{q}_I, t_I) = \int_{(t_I,\boldsymbol{q}_I)}^{(t_F,\boldsymbol{q}_F)} \mathfrak{D}\boldsymbol{q}\mathfrak{D}\boldsymbol{p} \exp(i\widetilde{A}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]) \tag{2-21}$$

と記すことにする．時刻 t_I で位相空間内の点 $(\boldsymbol{q}_I, \boldsymbol{p}_I)$ を出発し，時刻 t_F で $(\boldsymbol{q}_F, \boldsymbol{p}_F)$ に至る 1 本の経路 $\{\boldsymbol{q}(t), \boldsymbol{p}(t)\}, t \in (t_I, t_F)$ を指定すれば汎関数 $\widetilde{A}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$ の値が決まるが，時間発展 Green 関数 $G(\boldsymbol{q}_F, \boldsymbol{q}_I; t_F, t_I)$ はあらゆる経路に関する $\exp(i\widetilde{A}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}])$ の「和」として表現できる，というのが式 (2-21) の意味である．ここで，初期時刻 t_I，最終時刻 t_F に於て位置 $\boldsymbol{q}_I, \boldsymbol{q}_F$ は指定されているが，運動量 $\boldsymbol{p}_I, \boldsymbol{p}_F$ は全く任意に選べる点に注意する必要がある．

式 (2-20) の右辺に登場する $\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{p} = \partial L/\partial\dot{\boldsymbol{q}}$ で置き換えれば被積分関数は Lagrangian となり，積分自体は $\boldsymbol{q}$ のみに関する汎関数としての「作用積分 (Action integral)」を与える．古典論ではこの作用積分を停留させる経路だけが実現するが，量子論ではあらゆる経路が可能であり，それらが全て時間発展 Green 関数に寄与しているのである．式 (2-20) の右辺は $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ の汎関数として定義されているため作用積分そのものではないが，これに類似の量であるとの意味から $\widetilde{A}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}]$ なる記号を用いている．

一例として式 (2-5) の Hamiltonian で記述される 1 次元自由粒子を考えよう．この系は $N = 1$ の保存系だから Green 関数を $G(q_F, q_I; t_F - t_I)$ と表記すれば式 (2-19) は

$$\begin{aligned}
&G(q_F, q_I; t_F - t_I) \\
&\quad = \lim_{R\to\infty} \int \left\{ \prod_{r=0}^{R-1} \frac{dq_r dp_r}{2\pi} \right\} \exp\left(i \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \widetilde{L}_r \right) \delta(q_0 - q_I)
\end{aligned} \tag{2-22}$$

と書ける．式 (2-17) が

$$\widetilde{L}_r \equiv p_r(q_{r+1} - q_r)/\varepsilon_r - H(\overline{q}_r, p_r, t_r) = p_r(q_{r+1} - q_r)/\varepsilon_r - p_r^2/2m$$

となることから，

$$\sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \widetilde{L}_r = p_{R-1}q_R - p_0 q_0 + \sum_{r=1}^{R-1} (p_{r-1} - p_r) q_r - \frac{1}{2m} \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r p_r^2$$

を経て

$$\begin{aligned}
\exp\left(i \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \widetilde{L}_r \right) &= \exp\left\{ i(p_{R-1}q_R - p_0 q_0) - \frac{i}{2m} \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r p_r^2 \right\} \\
&\qquad \times \prod_{r=1}^{R-1} \exp\{ i(p_{r-1} - p_r) q_r \}
\end{aligned}$$

を得るから，式 (2-22) の右辺で $\{q_r\}_{r=0\sim R-1}$ に関する積分を実行すれば

$$\int \left\{\prod_{r=0}^{R-1} dq_r\right\} \exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r \widetilde{L}_r\right)\delta(q_0-q_I)$$
$$=\exp\left\{i(p_{R-1}q_R-p_0q_I)-\frac{i}{2m}\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r p_r^2\right\}$$
$$\times(2\pi)^{R-1}\prod_{r=1}^{R-1}\delta(p_{r-1}-p_r) \qquad (2-23)$$

が導かれる．これを式 (2-22) に代入して $p_{R-1},p_{R-2},\cdots,p_1$ で順次に積分すれば式 (2-23) の右辺に含まれるデルタ関数のため被積分関数の中の p_{R-1} は p_{R-2} に，その p_{R-2} は p_{R-3} に，$\cdots$ という具合に順次に置き変わってゆく．そのため，p_1 での積分が終了した時点では全ての $\{p_r\}_{r=1\sim R-1}$ が p_0 に置き換わり，式 (2-22) は

$$G(q_F,q_I;t_F-t_I)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int dp_0\exp\left\{i(q_R-q_I)p_0-\frac{i}{2m}\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r p_0^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int dp_0\exp\left\{i(q_F-q_I)p_0-\frac{i(t_F-t_I)}{2m}p_0^2\right\} \qquad (2-24)$$

と書ける．ここで，分割数 R に依存せずに

$$q_R=q_F,\quad \sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r=t_F-t_I$$

が成立することを利用した．p_0,q_F,q_I 及び t_F-t_I をそれぞれ p,q,q',t に置き換えれば，式 (2-24) の右辺の積分は前節の後半で式 (2-9) を導出する際に実行した積分と全く同じである．それゆえ，当然ながら式 (2-9) と同一の結果

$$G(q_F,q_I;t_F,t_I)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_F-t_I)}}\exp\left(\frac{im(q_F-q_I)^2}{2(t_F-t_I)}\right) \qquad (2-25)$$

を得る．

2-3　配位空間における経路積分

実際に遭遇する問題では Hamiltonian が運動量に関して 2 次形式になっている場合，つまり正定値な N 次実対称行列 W を使って

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot W(\boldsymbol{q},t)\boldsymbol{p}+V(\boldsymbol{q},t) \qquad (2-26)$$

と書ける場合が多く，特に行列 W が $\boldsymbol{q}$ や t に依存しない場合には標準形と呼ばれる．

対応する Lagrangian は

$$L(q,\dot{q},t)=\frac{1}{2}\dot{q}\cdot M(q,t)\dot{q}-V(q,t),\quad M(q,t)=W^{-1}(q,t) \tag{2-27}$$

であり，M は質量行列と呼ばれる．$H(\widehat{q},\widehat{p},t)$ が Weyl 順序になるように式(2-26)の右辺を書き換えたものを改めて $H(q,p,t)$ と記そう[1]．このとき，式(2-17)は

$$\widetilde{L}_r\equiv p_r\cdot\dot{q}_r-H(\overline{q}_r,p_r,t_r)=p_r\cdot\dot{q}_r-\frac{1}{2}p_r\cdot W_rp_r-V_r \tag{2-28}$$

と書ける．ただし

$$\dot{q}_r\equiv(q_{r+1}-q_r)/\varepsilon_r,\quad W_r\equiv W(\overline{q}_r,t_r),\quad V_r\equiv V(\overline{q}_r,t_r) \tag{2-29}$$

と略記した．$\widetilde{L}_r$ を最小にする p_r を $p_r^{\min}$ とすれば

$$p_r^{\min}=W_r^{-1}\dot{q}_r=M_r\dot{q}_r,\quad M_r\equiv M(\overline{q}_r,t_r)=W_r^{-1} \tag{2-30}$$

であり，この $p_r^{\min}$ を使えば式(2-28)は

$$\widetilde{L}_r=-\frac{1}{2}(p_r-p_r^{\min})\cdot W_r(p_r-p_r^{\min})+L_r \tag{2-31}$$

と書ける．L_r は p_r に関する $\widetilde{L}_r$ の最小値であり，Lagrangian のサンプル値

$$L_r\equiv L(\overline{q}_r,\dot{q}_r,t_r)=\frac{1}{2}\dot{q}_r\cdot M_r\dot{q}_r-V_r \tag{2-32}$$

として与えられる．

さて，式(2-31)を式(2-16)の右辺に代入すれば L_r が p_r を含まないので

$$\begin{aligned}&\int\frac{dp_r}{(2\pi)^N}\exp(i\varepsilon_r\widetilde{L}_r)\\&=\frac{\exp(i\varepsilon_rL_r)}{(2\pi)^N}\int dp_r\exp\left[-\frac{i\varepsilon_r}{2}(p_r-p_r^{\min})\cdot W_r(p_r-p_r^{\min})\right]\end{aligned} \tag{2-33}$$

と書ける．ところで，一般に可換な N 次実対称行列 S に対して

$$\int dx\exp\left(\frac{i}{2}x\cdot Sx\right)=\sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\det S}},\quad \det S=\exp(\mathrm{Tr}[\ln S]) \tag{2-34}$$

が成立するから[2]，式(2-33)の右辺の積分は変数変換 $x=p_r-p_r^{\min}$ によって

$$\int dx\exp\left[\frac{i}{2}x\cdot(-\varepsilon_rW_r)x\right]$$

---

1) $H(\widehat{q},\widehat{p},t)$ が Weyl 順序になるように式(2-26)の右辺を書き換えても，c 関数としては不変だから $H(\overline{q}_r,p_r,t_r)$ は書き換える以前の式(2-26)の右辺に $\overline{q}_r,p_r,t_r$ を代入したものに等しい点に注意．

2) 章末の問1およびその解答を参照．

$$= \sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\det(-\varepsilon_r W_r)}} = \sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{(-\varepsilon_r)^N \det W_r}} = \left(\frac{2\pi}{i\varepsilon_r}\right)^{N/2} \frac{1}{(\det W_r)^{1/2}}$$

と計算され，式 (2-33) は

$$\int \frac{d\boldsymbol{p}_r}{(2\pi)^N} \exp(i\varepsilon_r \widetilde{L}_r) = \frac{\exp(i\varepsilon_r L_r)}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}(\det W_r)^{1/2}}$$
$$= \frac{1}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}} \exp\left(i\varepsilon_r L_r - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\ln W_r]\right) \tag{2-35}$$

と書ける．これを式 (2-19) に代入すれば

$$G(\boldsymbol{q}_F, t_F; \boldsymbol{q}_I, t_I) = \lim_{R\to\infty} \int \prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{q}_r \int \frac{d\boldsymbol{p}_r}{(2\pi)^N} \exp(i\varepsilon_r \widetilde{L}_r) \delta(\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_I)$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int \prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{q}_r \frac{1}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}} \exp\left(i\varepsilon_r L_r - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\ln W_r]\right) \delta(\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_I)$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int \left\{\prod_{r=0}^{R-1} \frac{d\boldsymbol{q}_r}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}}\right\} \exp\left\{i\sum_{r=0}^{R-1}\left(\varepsilon_r L_r - \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}[\ln W_r]\right)\right\} \delta(\boldsymbol{q}_0 - \boldsymbol{q}_I) \tag{2-36}$$

が結論される．ここで，古典論における作用積分を $A[\boldsymbol{q}]$ として

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r L_r = A[\boldsymbol{q}] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$
$$= \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot M(\boldsymbol{q}, t)\dot{\boldsymbol{q}} - V(\boldsymbol{q}, t)\right\} \tag{2-37}$$

が成立する点に注意しよう．$\mathrm{Tr}[\ln W_r]$ の和は $R \to \infty$ で発散するが[1]，形式的に

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{r=0}^{R-1} \mathrm{Tr}[\ln W_r] = \left(\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) \left(\lim_{R\to\infty} \sum_{r=0}^{R-1} \bar{\varepsilon}\,\mathrm{Tr}[\ln W_r]\right)$$
$$= \delta(0) \int_{t_I}^{t_F} dt \mathrm{Tr}(\ln W(\boldsymbol{q}, t)] \tag{2-38}$$

と表記し ($\bar{\varepsilon}$ は $\{\varepsilon_r\}_{r=0\sim R-1}$ の平均値と考えれば良い)，

$$A_g[\boldsymbol{q}] \equiv A[\boldsymbol{q}] - \frac{1}{2i}\delta(0) \int_{t_I}^{t_F} dt \mathrm{Tr}[\ln W(\boldsymbol{q}, t)] \tag{2-39a}$$

1)　$(2\pi i\varepsilon_r)^{-N/2}$ の積も $R \to \infty$ で発散するが，式 (2-36) の右辺全体としては有限値に収束する点に注意．

を定義する．あるいは，$\ln W = \ln M^{-1} = -\ln M$ を利用すれば

$$A_g[q] \equiv A[q] + \frac{1}{2i}\delta(0)\int_{t_I}^{t_F} dt \mathrm{Tr}[\ln M(q,t)] \tag{2-39b}$$

とも表現できる．何れにせよ，形式的に

$$\lim_{R\to\infty}\left(\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r L_r - \frac{1}{2i}\sum_{r=0}^{R-1}\mathrm{Tr}[\ln W_r]\right) = A_g[q]$$

が成立するので，式(2-36)を

$$G(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q \exp(iA_g[q]) \tag{2-40}$$

と略記することにする．簡便さのために形式的な表記法を多用しているが，細かな議論が必要な場合には式(2-36)の右辺に戻って考えればよい．

ところで，式(2-26)のHamiltonianが標準形なら，つまり W が q, t に依存しなければ $\det W_r$ は r に依存しない定数 $\det W$ となり，式(2-36)は

$$G(q_F, t_F; q_I, t_I) = \lim_{R\to\infty}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\frac{dq_r}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}(\det W)^{1/2}}\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r L_r\right)\delta(q_0 - q_I) \tag{2-41}$$

と書ける．そこで，この場合には式(2-40)の代りに

$$G(q_F, t_F; q_I, t_I) = \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q \exp(iA[q]) \tag{2-42}$$

と表記する．同じ記号 $\mathfrak{D}q$ であっても，式(2-40)では

$$\mathfrak{D}q = \lim_{R\to\infty}\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\frac{dq_r}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}}\right\}\delta(q_0 - q_I) \tag{2-43}$$

を意味し，式(2-42)では

$$\mathfrak{D}q = \lim_{R\to\infty}\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\frac{dq_r}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}(\det W)^{1/2}}\right\}\delta(q_0 - q_I) \tag{2-44}$$

を意味している点に注意する必要がある．

前節と同じく，一例として式(2-5)のHamiltonianで記述される1次元自由粒子を考えよう．この系は標準系だから式(2-41)が適用でき，$N=1$ だから W は単なる実数であって $\det W = W = 1/m$ が成立する．従って式(2-41)は

$$G(q_F, q_I; t_F - t_I)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon_r}}dq_r\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r L_r\right)\delta(q_0-q_I) \quad (2-45)$$

と書け，式 (2-32) は

$$L_r = \frac{1}{2}m\dot{q}_r^2 = \frac{1}{2}m\frac{(q_{r+1}-q_r)^2}{\varepsilon_r^2} \quad (2-46)$$

となる．式 (2-45) の積分を q_0 から q_S まで実行して得られる中間結果を

$$I_S \equiv \int\left\{\prod_{r=0}^{S}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon_r}}dq_r\right\}\exp\left(\frac{im}{2}\sum_{r=0}^{S}\frac{(q_{r+1}-q_r)^2}{\varepsilon_r}\right)\delta(q_0-q_I) \quad (2-47)$$

と表現すれば，式 (2-45) の積分は I_{R-1} に一致する．q_S に関する積分だけを分離すれば分かるように，I_S は漸化式

$$I_S = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon_S}}\int dq_s\exp\left\{\frac{im}{2}\frac{(q_{S+1}-q_S)^2}{\varepsilon_S}\right\}I_{S-1} \quad (2-48)$$

を満足するが，この漸化式を初期条件

$$I_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon_0}}\int dq_0\exp\left\{\frac{im}{2}\frac{(q_1-q_0)^2}{\varepsilon_0}\right\}\delta(q_0-q_I)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon_0}}\exp\left\{\frac{im}{2}\frac{(q_1-q_I)^2}{\varepsilon_0}\right\} \quad (2-49)$$

の下に解けば

$$I_S = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\sigma_S}}\exp\left\{\frac{im}{2}\frac{(q_{S+1}-q_I)^2}{\sigma_S}\right\}, \quad \sigma_S \equiv \sum_{r=0}^{S}\varepsilon_r \quad (2-50)$$

を得る．実際，式 (2-49) によって $S=0$ では成立しており，$S=s-1 (s\geq 0)$ で成立すれば $S=s$ でも成立することが以下のように示される．まず，式 (2-50) が $S=s-1$ で成立していたとすれば，これを式 (2-48) に代入することによって

$$I_S = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\varepsilon_s}}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\sigma_{s-1}}}\int dq_s\exp\left\{\frac{im}{2}\left[\frac{(q_{s+1}-q_s^2)}{\varepsilon_s}+\frac{(q_s-q_I)^2}{\sigma_{s-1}}\right]\right\} \quad (2-51)$$

を得る．ところが，

$$\frac{(q_{s+1}-q_s)^2}{\varepsilon_s}+\frac{(q_s-q_I)^2}{\sigma_{s-1}}$$

$$= \frac{\varepsilon_s+\sigma_{s-1}}{\varepsilon_s\sigma_{s-1}}\left(q_s-\frac{\sigma_{s-1}q_{s+1}+\varepsilon_s q_I}{\varepsilon_s+\sigma_{s-1}}\right)^2+\frac{(q_{s+1}-q_I)^2}{\varepsilon_s+\sigma_{s-1}}$$

と変形できるから，式 (2-8) によって

$$\int dq_s \exp\left\{-\frac{m}{2i}\left[\frac{(q_{s+1}-q_s)^2}{\varepsilon_s}+\frac{(q_s-q_I)^2}{\sigma_{s-1}}\right]\right\}$$
$$=\sqrt{\frac{2\pi i\varepsilon_s\sigma_{s-1}}{m\sigma_s}}\exp\left\{\frac{im}{2}\frac{(q_{s+1}-q_I)^2}{\sigma_s}\right\}$$

が成立し ($\varepsilon_s+\sigma_{s-1}=\sigma_s$ を利用)，これを式 (2-51) に代入すれば式 (2-50) で $S=s$ とした関係式を得る．それゆえ，$\sigma_{R-1}=t_F-t_I$, $q_R=q_F$ を考慮すれば，

$$G(q_F,q_I;t_F-t_I)=\lim_{R\to\infty}I_{R-1}=\sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_F-t_I)}}\exp\left(\frac{im(q_F-q_I)^2}{2(t_F-t_I)}\right) \tag{2-52}$$

が結論される．

2-4 一般化 Green 関数

式 (2-1) に示されるように $\hat{\boldsymbol{q}}$ に関する時間発展 Green 関数は時刻 t_I における基底ケット $|\boldsymbol{q}_I,t_I\rangle$ と時刻 t_F における基底ケット $|\boldsymbol{q}_F,t_F\rangle$ の内積として定義されるが，摂動論などでは $\langle\boldsymbol{q}_F,t_F|$ と $|\boldsymbol{q}_I,t_I\rangle$ の間に様々な時刻における位置作用素のべきを挟んで定義される一般化 Green 関数

$$G^{l_1l_2\cdots l_k}_{n_1n_2\cdots n_K}(\boldsymbol{q}_F,t_F;\boldsymbol{q}_I,t_I;t_1,t_2,\cdots,t_K)$$
$$\equiv\langle\boldsymbol{q}_F,t_F|T\left[\hat{q}^{l_1}_{n_1}(t_1)\hat{q}^{l_2}_{n_2}(t_2)\cdots\hat{q}^{l_K}_{n_K}(t_K)\right]|\boldsymbol{q}_I,t_I\rangle \tag{2-53}$$

が重要な役割を演ずる．ここで $\hat{q}_{n_k}(t_k)$ は時刻 t_k における作用素ベクトル $\hat{\boldsymbol{q}}(t_k)$ の第 n_k 要素であり，T は時間順序演算子であって作用素 $\{\hat{q}^{l_k}_{n_k}(t_k)\}_{k=1\sim K}$ を時刻の遅い順に左から右に並べる作用を持つ[1)]．また，結果として得られる $T[\hat{q}^{l_1}_{n_1}(t_1)\cdots\hat{q}^{l_K}_{n_K}(t_K)]$ は $\{\hat{q}^{l_k}_{n_k}(t_k)\}_{k=1\sim K}$ の時間順序積，あるいは単に T積と呼ばれる．$K=0$ の場合には一般化 Green 関数は通常の時間発展 Green 関数 $G(\boldsymbol{q}_F,t_F;\boldsymbol{q}_I,t_I)$ に一致する．

さて，一般化 Green 関数に関する経路積分表示を得るのが目的であるが，まずは $K=1$ の場合から始めよう．この場合には時間順序は問題にならず

$$G^{l_1}_{n_1}(\boldsymbol{q}_F,t_F;\boldsymbol{q}_I,t_I;t_1)$$
$$=\langle\boldsymbol{q}_F,t_F|\hat{q}^{l_1}_{n_1}(t_1)|\boldsymbol{q}_I,t_I\rangle$$
$$=\int d\boldsymbol{q}_1\langle\boldsymbol{q}_F,t_F|\hat{q}^{l_1}_{n_1}(t_1)|\boldsymbol{q}_1,t_1\rangle\langle\boldsymbol{q}_1,t_1|\boldsymbol{q}_I,t_I\rangle$$

1) 付録 A の式 (2-8) を参照のこと．

$$
\begin{aligned}
&= \int dq_1 [q_1]_{n_1}^{l_1} \langle q_F, t_F | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_I, t_I \rangle \\
&= \int dq_1 [q_1]_{n_1}^{l_1} G(q_F, t_F; q_1, t_1) G(q_1, t_1; q_I, t_I) \\
&= \int dq_1 [q_1]_{n_1}^{l_1} \int_{(t_1, q_1)}^{(t_F, q_F)} \mathfrak{D} q \exp(iA_g[q]) \int_{(t_I, q_I)}^{(t_1, q_1)} \mathfrak{D} q \exp(iA_g[q])
\end{aligned}
\tag{2-54}
$$

と書ける．ここで $[q_1]_{n_1}$ は N 次元ベクトル q_1 の第 n_1 成分を，$[q_1]_{n_1}^{l_1}$ はその l_1 乗を意味しており，式の導出には $|q_1, t_1\rangle$ が固有値 $[q_1]_{n_1}^{l_1}$ に属する $\hat{q}_{n_1}^{l_1}(t_1)$ の固有ケットであること，および式 (2-40) を利用している[1)]．式 (2-54) 最右辺の被積分関数は (t_I, q_I) を出発し，(t_1, q_1) を経由して (t_F, q_F) に至るあらゆる経路についての $\exp(iA_g[q])$ の和に $[q_1]_{n_1}^{l_1}$ を乗じたものであり，q_1 はそれらの経路を通った場合の時刻 t_1 に於ける $q(t)$ の値に他ならない．従って，q_1 で積分することは (t_I, q_I) を出発して (t_F, q_F) に至るあらゆる経路について $\{q_{n_1}(t_1)\}^{l_1} \exp(iA_g[q])$ の和を計算することを意味し

$$
G_{n_1}^{l_1}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1) = \int_{(t_I, q_I)}^{(t_F, q_F)} \mathfrak{D} q \{q_{n_1}(t_1)\}^{l_1} \exp(iA_g[q]) \tag{2-55}
$$

が結論される．より直接に証明したければ次のようにすれば良い．証明の間は記号 t_1 を別の意味で使うため，これを t_B で置き換え，サンプル点

$$
t_0(\equiv t_I) < t_1 < \cdots < t_{R_1 - 1} < t_{R_1}(\equiv t_B) < t_{R_1+1} < \cdots < t_R(\equiv t_F)
$$

を設定して (t_I, t_B) と (t_B, t_F) をそれぞれ $R_1, R_2 = R - R_1$ 個に分割する．そして

$$
s_r \equiv \varepsilon_r L_r - \frac{1}{2i} \mathrm{Tr}[\ln W_r]
$$

とすれば，式 (2-36) によって式 (2-54) は

$$
\begin{aligned}
&G_{n_1}^{l_1}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_B) \\
&\quad = \int dq_B [q_B]_{n_1}^{l_1} \int_{(t_B, q_B)}^{(t_F, q_F)} \mathfrak{D} q \exp(iA_g[q]) \int_{(t_I, q_I)}^{(t_B, q_B)} \mathfrak{D} q \exp(iA_g[q]) \\
&\quad = \int dq_B [q_B]_{n_1}^{l_1} \lim_{R_2 \to \infty} \int \left\{ \prod_{r=R_1}^{R-1} \frac{dq_r}{(2\pi i \varepsilon_r)^{N/2}} \right\} \exp\left(i \sum_{r=R_1}^{R-1} s_r \right) \delta(q_{R_1} - q_B)
\end{aligned}
$$

1) 標準系では式 (2-40) の代りに式 (2-42) を代入することもできる．

$$\times \lim_{R_1\to\infty} \int \left\{ \prod_{r=0}^{R_1-1} \frac{dq_r}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}} \right\} \exp\left(i \sum_{r=0}^{R_1-1} s_r \right) \delta(q_0 - q_I)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int \left\{ \prod_{r=0}^{R-1} \frac{dq_r}{(2\pi i\varepsilon_r)^{N/2}} \right\} [q_{R_1}]_{n_1}^{l_1} \exp\left(i \sum_{r=0}^{R-1} s_r \right) \delta(q_0 - q_I)$$

$$= \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q\{q_{n_1}(t_B)\}^{l_1} \exp(iA_g[q])$$

と変形できるが，これは式(2-55)に他ならない．ただし，R_1 が増加しても $[q_{R_1}]_{n_1}^{l_1}$ は常に $\{q_{n_1}(t_B)\}^{l_1}$ となることを利用している．また，

$$\varepsilon_r \equiv t_{r+1} - t_r, \quad \varepsilon_{\max,1} \equiv \max_{0\le r\le R_1-1} \varepsilon_r, \quad \varepsilon_{\max,2} \equiv \max_{R_1\le r\le R-1} \varepsilon_r$$

とするとき，$R_1, R_2 \to \infty$ の極限では $\varepsilon_{\max,1}, \varepsilon_{\max,2} \to 0$ となるように，$R \to \infty$ の極限では $\max(\varepsilon_{\max,1}, \varepsilon_{\max,2}) \to 0$ となるように時間軸の分割点を選ぶものとする．

では，一般の場合に議論を進めよう．まず，時間順序積が $(1,2,\cdots,K)$ の置換 σ によって

$$T\{\hat{q}_{n_1}^{l_1}(t_1)\hat{q}_{n_2}^{l_2}(t_2)\cdots\hat{q}_{n_K}^{l_K}(t_K)\} = \hat{q}_{n_{\sigma(1)}}^{l_{\sigma(1)}}(t_{\sigma(1)})\hat{q}_{n_{\sigma(2)}}^{l_{\sigma(2)}}(t_{\sigma(2)})\cdots\hat{q}_{n_{\sigma(K)}}^{l_{\sigma(K)}}(t_{\sigma(K)})$$
$$t_F > t_{\sigma(1)} > t_{\sigma(2)} > \cdots > t_{\sigma(K)} > t_I \tag{2-56}$$

として与えられたとする．このとき，

$$G_{n_1 n_2\cdots n_K}^{l_1 l_2\cdots l_K}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K)$$
$$= \langle q_F, t_F | \hat{q}_{n_{\sigma(1)}}^{l_{\sigma(1)}}(t_{\sigma(1)})\hat{q}_{n_{\sigma(2)}}^{l_{\sigma(2)}}(t_{\sigma(2)})\cdots\hat{q}_{n_{\sigma(K)}}^{l_{\sigma(K)}}(t_{\sigma(K)}) | q_I, t_I\rangle$$
$$= \int dq_{\sigma(1)} \langle q_F, t_F | \hat{q}_{n_{\sigma(1)}}^{l_{\sigma(1)}}(t_{\sigma(1)}) | q_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)}\rangle$$
$$\times \langle q_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} | \hat{q}_{n_{\sigma(2)}}^{l_{\sigma(2)}}(t_{\sigma(2)})\cdots\hat{q}_{n_{\sigma(K)}}^{l_{\sigma(K)}}(t_{\sigma(K)}) | q_I, t_I\rangle$$
$$= \int dq_{\sigma(1)} [q_{\sigma(1)}]_{n_{\sigma(1)}}^{l_{\sigma(1)}} G(q_F, t_F; q_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)})$$
$$\times \langle q_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} | \hat{q}_{n_{\sigma(2)}}^{l_{\sigma(2)}}(t_{\sigma(2)})\cdots\hat{q}_{n_{\sigma(K)}}^{l_{\sigma(K)}}(t_{\sigma(K)}) | q_I, t_I\rangle$$

と変形できるが，これを繰り返せば $t_{\sigma(0)} \equiv t_F$，$q_{\sigma(0)} \equiv q_F$ として

$$G_{n_1 n_2\cdots n_K}^{l_1 l_2\cdots l_K}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K)$$
$$= \int \prod_{k=1}^{K} dq_{\sigma(k)} [q_{\sigma(k)}]_{n_{\sigma(k)}}^{l_{\sigma(k)}}$$
$$\times G(q_{\sigma(k-1)}, t_{\sigma(k-1)}; q_{\sigma(k)}, t_{\sigma(k)}) G(q_{\sigma(K)}, t_{\sigma(K)}; q_I, t_I)$$

$$= \int \prod_{k=1}^{K} dq_{\sigma(k)} [q_{\sigma(k)}]_{n_{\sigma(k)}}^{l_{\sigma(k)}} \int_{(t_{\sigma(k)}, q_{\sigma(k)})}^{(t_{\sigma(k-1)}, q_{\sigma(k-1)})} \mathfrak{D}q \exp(iA_g[q])$$

$$\times \int_{(t_I, q_I)}^{(t_{\sigma(K)}, q_{\sigma(K)})} \mathfrak{D}q \exp(iA_g[q]) \qquad (2-57)$$

を得る．最右辺の被積分関数は (t_I, q_I) を出発し，$(t_{\sigma(K)}, q_{\sigma(K)})$, $(t_{\sigma(K-1)}, q_{\sigma(K-1)})$, $\cdots$, $(t_{\sigma(1)}, q_{\sigma(1)})$ を順次に経由して $(t_{\sigma(0)}, q_{\sigma(0)}) = (t_F, q_F)$ に至るあらゆる経路についての $\exp(iA_g[q])$ の和に $\prod_{k=1}^{K} [q_{\sigma(k)}]_{n_{\sigma(k)}}^{l_{\sigma(k)}}$ を乗じたものであり，$[q_{\sigma(k)}]_{n_{\sigma(k)}}$ はそれらの経路を通った場合の時刻 $t_{\sigma(k)}$ に於ける $q_{n_{\sigma(k)}}(t)$ の値である．それゆえ

$$G_{n_1 n_2 \cdots n_K}^{l_1 l_2 \cdots l_K}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K)$$

$$= \int_{(t_I, q_I)}^{(t_F, q_F)} \mathfrak{D}q \prod_{k=1}^{K} \{q_{n_{\sigma(k)}}(t_{\sigma(k)})\}^{l_{\sigma(k)}} \exp(iA_g[q])$$

と書けるが，c-数の積に関しては各項 $q_{n_{\sigma(k)}}(t_{\sigma(k)})$ の順序を任意に交換できるから

$$\prod_{k=1}^{K} \{q_{n_{\sigma(k)}}(t_{\sigma(k)})\}^{l_{\sigma(k)}} = \prod_{k=1}^{K} \{q_{n_k}(t_k)\}^{l_k}$$

$$= \{q_{n_1}(t_1)\}^{l_1} \{q_{n_2}(t_2)\}^{l_2} \cdots \{q_{n_K}(t_K)\}^{l_K}$$

が成立し，最終的に

$$G_{n_1 n_2 \cdots n_K}^{l_1 l_2 \cdots l_K}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K)$$

$$= \int_{(t_I, q_I)}^{(t_F, q_F)} \mathfrak{D}q \{q_{n_1}(t_1)\}^{l_1} \cdots \{q_{n_K}(t_K)\}^{l_K} \exp(iA_g[q]) \qquad (2-58)$$

が結論される．式(2−58)は $t_1, t_2, \cdots, t_K$ の大小関係に関係なく成立する点に注意しよう．

2−5　生成汎関数とその経路積分表示

前節で導入した一般化Green関数は式(2−58)を使って直接に計算することも可能だが，K の値を変える毎に，あるいは同じ K でも $\{l_k\}_{k=1\sim K}$ や $\{n_k\}$, $\{t_k\}$ を変えるたびに計算を繰り返していたのでは効率が悪い．あらゆる種類の一般化Green関数を統一的に計算する手法があれば便利だろう．実は確率論の分野では確率密度関数のFourier変換として特性関数が定義され，この特性関数から任意次数のモーメントが統一的に計算されている．例えば確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とすれば対応

する特性関数 $\phi(\xi)$ は

$$\phi(\xi) \equiv \int dx \exp(i\xi x) f(x) \tag{2-59}$$

として定義され,

$$\left.\frac{d^n\phi}{d\xi^n}\right|_{\xi=0} = \int dx (ix)^n \exp(i\xi x) f(x) \Big|_{\xi=0} = i^n \int dx\, x^n f(x)$$

が成立することから n 次モーメント $< X^n >$ が

$$< X^n > \equiv \int dx\, x^n f(x) = i^{-n} \left.\frac{d^n\phi}{d\xi^n}\right|_{\xi=0} \tag{2-60}$$

として計算できる．多変数の場合も全く同様であり，M 個の確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_M$ を成分とする M 次元確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の同時確率密度関数を $f(\boldsymbol{x})$ とすれば特性関数は

$$\phi(\boldsymbol{\xi}) \equiv \int d\boldsymbol{x} \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x}) \tag{2-61}$$

として定義され，M 次元ベクトル $\boldsymbol{\xi} \equiv (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_M)^t$ の関数となる．このとき，$\boldsymbol{X}$ のモーメントは

$$\begin{aligned} < X_1^{l_1} X_2^{l_2} \cdots X_M^{l_M} > &\equiv \int d\boldsymbol{x} x_1^{l_1} x_2^{l_2} \cdots x_M^{l_M} f(\boldsymbol{x}) \\ &= i^{-(l_1+l_2+\cdots+l_M)} \left.\frac{\partial^{(l_1+l_2+\cdots+l_M)}\phi}{\partial\xi_1^{l_1}\partial\xi_2^{l_2}\cdots\partial_M^{l_M}}\right|_{\boldsymbol{\xi}=0} \end{aligned} \tag{2-62}$$

として計算されることになる．

こうした特性関数との関係を明確にするため，まずは1自由度系 $(N = 1)$ を考え，その後に一般の N 自由度系に進むことにしよう．$N = 1$ では $\boldsymbol{q}$ は1成分のベクトル，つまりスカラ q となり，成分を区別するための添字が必要ないため，一般化 Green 関数を $G^{l_1 l_2 \cdots l_K}$ と記すことにする．つまり，$G^{l_1 l_2 \cdots l_K}$ は

$$\begin{aligned} &G^{l_1 l_2 \cdots l_K}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K) \\ &\equiv \langle q_F, t_F | T\{\widehat{q}^{l_1}(t_1)\widehat{q}^{l_2}(t_2)\cdots\widehat{q}^{l_K}(t_K)\} | q_I, t_I \rangle \end{aligned} \tag{2-63}$$

として定義される．このとき，式(2-58)は

$$\begin{aligned} &G^{l_1 l_2 \cdots l_K}(q_F, t_F; q_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K) \\ &= \int_{(t_I, q_I)}^{(t_F, q_F)} \mathfrak{D}q \{q(t_1)\}^{l_1} \{q(t_2)\}^{l_2} \cdots \{q(t_K)\}^{l_K} \exp(iA_g[q]) \end{aligned} \tag{2-64}$$

と表現されるが，これを式(2-62)と比べてみれば両者の類似性は明らかであろう．つまり $q(t_k)$ は x_m に，$\exp(iA_g[q])$ は $f(\boldsymbol{x})$ に，そして $G^{l_1 l_2 \cdots l_K}$ は $< X_1^{l_1} \cdots X_M^{l_M} >$

に対応している．それゆえ，特性関数 $\phi(\boldsymbol{\xi})$ に対応する関数を得るには式(2-61)で

$$\sum_{m=1}^{M} \xi_m x_m \quad \longrightarrow \quad \int_{t_I}^{t_F} dt J(t) q(t),$$

$$\int dx_1 dx_2 \cdots dx_M \quad \longrightarrow \quad \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q$$

という置き換えをすれば良いだろう．

$$Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J] \equiv \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q \exp\left(i \int_{t_I}^{t_F} dt\, J(t) q(t)\right) \exp(iA_g[q]) \qquad (2-65)$$

Z は $[t_I, t_F]$ 上の関数 $J(t)$ を c-数に対応させる汎関数であり，以下に示すように任意次数の一般化Green関数を系統的に算出する手段を与えることから，一般化Green関数の生成汎関数と呼ばれる．

さて，特性関数 ϕ を $\{\xi_m\}$ で次々に偏微分として最後に $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ とすれば $\boldsymbol{X}$ のモーメント $< X_1^{l_1} \cdots X_M^{l_M} >$ が計算されることから，生成汎関数 Z を $\{J(t_r)\}$ で次々に偏微分して最後に $J = 0$ （恒等的に0に等しい関数）とすれば一般化Green関数が得られるはずである．しかし，連続無限個の変数 $\{J(t)\}_{t=t_I \sim t_F}$ に依存する関数 Z を $J(t_r)$ で「偏微分する」とは何を意味しているのだろうか．この問いに答えるには次のように考えれば良い．ε を微少量とし，ε に関する2次以上の微小量を $O(\varepsilon^2)$ と記せば，任意の M 次元ベクトル $\boldsymbol{h}$ に対して

$$\phi(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{h}) - \phi(\boldsymbol{x}) = \varepsilon \sum_{m=1}^{M} h_m \frac{\partial \phi}{\partial x_m}(\boldsymbol{x}) + O(\varepsilon^2) \qquad (2-66)$$

が成立するが，逆に「任意の $\boldsymbol{h}$ に対して式(2-66)が成立すべし」という条件から $\partial\phi/\partial x_m$ を定義することも可能である．汎関数 Z の場合でも $[t_I, t_F]$ 上の任意関数 $h(t)$ に対して

$$Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J + \varepsilon h] - Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J] = \varepsilon \int_{t_I}^{t_F} dt h(t) \frac{\delta Z}{\delta J(t)} + O(\varepsilon^2) \qquad (2-67)$$

が成立すべしという条件から $\delta Z/\delta J(t)$ が決まる．$\partial\phi/\partial x_m$ が m に依存することに対応して $\delta Z/\delta J(t)$ は時間 t の関数となる．$\delta Z/\delta J(t)$ は $J(t)$ による Z の汎関数微分と呼ばれる．このように，連続無限個の変数 $\{J(t)\}_{t=t_I \sim t_F}$ に依存する関数 Z の $J(t_r)$ による偏微分とは汎関数微分 $\delta Z/\delta J(t_r)$ を意味するのである．

例えば，次式で定義される汎関数 $F[J]$ の汎関数微分を計算してみよう．

$$F[J] \equiv \exp\left(i\int_{t_I}^{t_F} dt J(t)q(t)\right) \tag{2-68}$$

この場合，

$$\begin{aligned} F[J+\varepsilon h] &= \exp\left(i\int_{t_I}^{t_F} dt\{J(t)+\varepsilon h(t)\}q(t)\right) \\ &= F[J]\exp\left(i\varepsilon\int_{t_I}^{t_F} dth(t)q(t)\right) \\ &= F[J]\left\{1+i\varepsilon\int_{t_I}^{t_F} dth(t)q(t)\right\}+O(\varepsilon^2) \\ &= F[J]+\varepsilon\int_{t_I}^{t_F} dth(t)\{iF[J]q(t)\}+O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

が成立するから

$$\frac{\delta}{\delta J(t)}F[J] = iq(t)F[J]$$

が結論される．同様にして汎関数微分を繰り返し実行すれば

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^{(l_1+l_2+\cdots+l_K)}F[J]}{\delta\{J(t_1)\}^{l_1}\delta\{J(t_2)\}^{l_2}\cdots\delta\{J(t_K)\}^{l_K}} \\ &\quad = i^{(l_1+l_2+\cdots+l_K)}\{q(t_1)\}^{l_1}\{q(t_2)\}^{l_2}\cdots\{q(t_K)\}^{l_K}F[J] \end{aligned} \tag{2-69}$$

が導かれる．ところで，式(2-65)によれば生成汎関数 Z は $F[J]$ を使って

$$Z[q_F,t_F;q_I,t_I;J] \equiv \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}qF[J]\exp(iA_g[q]) \tag{2-70}$$

と表現でき，$A_g[q]$ は $J(t)$ には依存しないから式(2-69)によって

$$\begin{aligned} &\frac{\delta^{(l_1+\cdots+l_K)}Z[q_F,t_F;q_I,t_I;J]}{\delta\{J(t_1)\}^{l_1}\cdots\delta\{J(t_K)\}^{l_K}} \\ &\quad = i^{(l_1+\cdots+l_K)}\int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q\{q(t_1)\}^{l_1}\cdots\{q(t_K)\}^{l_K}F[J]\exp(iA_g[q]) \end{aligned} \tag{2-71}$$

が成立する．この関係式は J が区間 $[t_I,t_F]$ で恒等的に零となる関数であっても成立し，その場合には $F[J]=1$ だから式(2-64)によって

$$G^{l_1l_2\cdots l_K}(q_F,t_F;q_I,t_I;t_1,t_2,\cdots,t_K)$$

$$= i^{-(l_1+l_2+\cdots+l_K)} \frac{\delta^{(l_1+l_2+\cdots+l_K)} Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J]}{\delta\{J(t_1)\}^{l_1} \delta\{J(t_2)\}^{l_2} \cdots \delta\{J(t_K)\}^{l_K}} \bigg|_{J=0} \qquad (2-72)$$

が結論される．このように，生成汎関数 Z が与えられれば汎関数微分を繰り返すだけで任意次数の一般化 Green 関数が計算できるのである．

では一般に N 自由度系に議論を進めよう．この場合，q が N 次元のベクトル $\boldsymbol{q}$ に代わることから J も同じ次元のベクトル $\boldsymbol{J}$ となり，式(2-65)は

$$Z[\boldsymbol{q}_F, t_F; \boldsymbol{q}_I, t_I; \boldsymbol{J}] \equiv \int_{(t_I, \boldsymbol{q}_I)}^{(t_F, \boldsymbol{q}_F)} \mathfrak{D}\boldsymbol{q} \exp\left\{ iA_g[\boldsymbol{q}] + i\int_{t_I}^{t_F} dt \boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{q}(t) \right\} \qquad (2-73)$$

と書かれる．また，式(2-72)に対応して

$$G^{l_1 l_2 \cdots l_K}_{n_1 n_2 \cdots n_K}(\boldsymbol{q}_F, t_F; \boldsymbol{q}_I, t_I; t_1, t_2, \cdots, t_K) = i^{-(l_1+l_2+\cdots+l_K)} \frac{\delta^{(l_1+l_2+\cdots+l_K)} Z[\boldsymbol{q}_F, t_F; \boldsymbol{q}_I, t_I; \boldsymbol{J}]}{\delta\{J_{n_1}(t_1)\}^{l_1} \delta\{J_{n_2}(t_2)\}^{l_2} \cdots \delta\{J_{n_K}(t_K)\}^{l_K}} \bigg|_{\boldsymbol{J}=0} \qquad (2-74)$$

が成立することも容易に理解できるだろう．$J_{n_k}(t_k)$ がベクトル $\boldsymbol{J}(t_k)$ の第 n_k 要素であることは言うまでもない．

ところで，実効 Lagrangian $L_{\boldsymbol{J}}$ を

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) &\equiv L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) + \boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}\cdot M(\boldsymbol{q}, t)\dot{\boldsymbol{q}} - V(\boldsymbol{q}, t) + \boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{q} \end{aligned} \qquad (2-75)$$

で定義し，$A_g[\boldsymbol{q}]$ や $A[\boldsymbol{q}]$ の定義式(2-39)，(2-37)に戻って考えれば，生成汎関数とは $L_{\boldsymbol{J}}$ で記述される系に対する時間発展 Green 関数に過ぎないことが分かる．つまり，外部から時間依存性のポテンシャル $V_{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{q}, t) \equiv -\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{q}$ が付加された仮想的な系を考えて時間発展 Green 関数を計算すれば，それが元の系に対する生成汎関数となる．$\boldsymbol{J}(t)$ が外場と呼ばれるのはこのためである．

本来なら簡単な系に対する生成汎関数を具体的に計算し，汎関数微分によって一般化 Green 関数を算出すべきであるが，1次元自由粒子に対してさえ生成汎関数の計算には多少の技巧が必要である．こうした技法についての解説は調和振動子について詳述した次章にゆずることにしよう．

演 習 問 題

1. 可逆な N 次実対称行列 S に対して

$$\int d\boldsymbol{x} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{x}\cdot S\boldsymbol{x}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\det S}}, \quad \det S = \exp(\mathrm{Tr}[\ln S])$$

が成立することを示せ．

2. 1 次元自由粒子に対する 1 点一般化 Green 関数 G^l が

$$G^l(q_F, t_F; q_I, t_I; t) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{m}{(t_F - t_I)}}\left(\frac{(t_F - t)(t - t_I)}{m(t_F - t_I)}\right)^{l/2} I_l$$

$$I_l \equiv \int dx (x + A)^l \exp\left(\frac{i}{2}x^2\right)$$

$$A \equiv \frac{m^{1/2}\{q_F(t - t_I) + q_I(t_F - t)\}}{\sqrt{(t_F - t)(t - t_I)(t_F - t_I)}}$$

として与えられることを示せ．また，G^1 を具体的に計算せよ．

3. 汎関数

$$A[q] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt L(q, \dot{q}, t)$$

の汎関数微分を計算せよ．

第3章
調和振動子

本章では1自由度の調和振動子を対象に時間発展 Green 関数や一般化 Green 関数の生成汎関数を具体的に計算する．Lagrangian が一般座標の二次関数であるため経路積分が閉じた形で厳密に計算でき，実用上でも重要な役割を演ずるからである．例えば非調和な相互作用を持つ多自由度系でも平衡点近傍では調和振動子の集合として近似され，非調和項は必要に応じて摂動論で処理できる．本書の後半の主題となる「場」もまた互いに相互作用する無限個の調和振動子の集合体に過ぎない．

3－1　時間発展 Green 関数

古典的な Hamiltonian が

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{3-1}$$

で与えられる調和振動子を考えよう．この Hamiltonian は標準形であり，q,p を対応する作用素 $\widehat{q},\widehat{p}$ で置き換えた量子系の Hamiltonian は Weyl 順序にある．それゆえ，この量子系に対する時間発展 Green 関数は式 (2－42) によって

$$G(q_F, q_I; t_F - t_I) = \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q \exp(iA[q]) \tag{3-2}$$

として与えられる[1]．ただし $A[q]$ は古典論における作用積分であり，ここでは

$$A[q] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt L(q,\dot{q}) = \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2\right\} \tag{3-3}$$

となる．$t = t_I$ で q_I を出発し，$t = t_F$ で q_F に至る古典的経路を $q_c(t)$ としよう．$q_c(t)$ は Euler-Lagrange 方程式[2]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \longrightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{3-4}$$

1) この系は保存系だから Green 関数 $G(q_F, t_F; q_I, t_I)$ を $G(q_F, q_I; t_F - t_I)$ として表記する．

2) これが汎関数 $A[q]$ の停留条件となっていることは言うまでもない．

に従い，仮定によって境界条件

$$q(t_I)=q_I,\quad q(t_F)=q_F \tag{3-5}$$

を満足するから

$$q_c(t)=q_I\cos\omega(t-t_I)+\frac{q_F-q_I\cos\omega T}{\sin\omega T}\sin\omega(t-t_I),\ T\equiv t_F-t_I \tag{3-6}$$

である．ここで，式 (3-2) の右辺に寄与する各経路 $q(t)$ と古典経路 $q_c(t)$ との差を $x(t)$ としよう．

$$x(t)=q(t)-q_c(t)\ \longrightarrow\ q(t)=x(t)+q_c(t) \tag{3-7}$$

このとき，$q(t)$ と $q_c(t)$ が共に境界条件 (3-5) を満足するため，$x(t)$ は

$$x(t_I)=x(t_F)=0 \tag{3-8}$$

を満足する．式 (3-5) を満足する経路の集合を S_q，式 (3-8) を満足する経路の集合を S_x とすれば式 (3-7) によって S_q と S_x は 1 対 1 に対応し，q が S_q 上を動けば x は S_x 全体を動くことになる．また，$A[q]$ は

$$\begin{aligned}A[q]&=\int_{t_I}^{t_F}dt\left\{\frac{1}{2}(\dot{x}+\dot{q}_c)^2-\frac{1}{2}\omega^2(x+q_c)^2\right\}\\&=\int_{t_I}^{t_F}dt\left\{\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2-\frac{1}{2}\omega^2x^2\right)+\left(\frac{1}{2}\dot{q}_c^2-\frac{1}{2}\omega^2q_c^2\right)+(\dot{x}\dot{q}_c-\omega^2xq_c)\right\}\\&=A[x]+A[q_c]+x\dot{q}_c\Big|_{t_I}^{t_F}-\int_{t_I}^{t_F}dt\,x(\ddot{q}_c+\omega^2q_c)=A[x]+A[q_c]\end{aligned}$$

と表現できるから（最後の変形では $x(t)$ が式 (3-8) を満足し，$q_c(t)$ が式 (3-4) を満足することを使用した），式 (3-2) は

$$\begin{aligned}G(q_F,q_I;t_F-t_I)&=\int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)}\mathfrak{D}q\exp(iA[q])\\&=\int_{(t_I,0)}^{(t_F,0)}\mathfrak{D}x\exp\{i(A[x]+A[q_c])\}\\&=\exp(iA[q_c])\int_{(t_I,0)}^{(t_F,0)}\mathfrak{D}x\exp\{iA[x]\}\\&=\exp(iA[q_c])G(0,0;t_F-t_I)\end{aligned} \tag{3-9}$$

と変形できる．ここで $\mathfrak{D}q$ を $\mathfrak{D}x$ で置き換えたが，その正当性は経路積分の定義式

に戻って考えれば明らかとなる．つまり，時間区間 $[t_I, t_F]$ を R 分割した際の第 r 番目の分割点 t_r における値を q_r, x_r とすれば両者は定数 $q_c(t_r)$ しか違わないので $dq_r = dx_r$ となり，これが $\mathfrak{D}q = \mathfrak{D}x$ を保証する．

ところで，古典経路に対する作用積分 $A[q_c]$ は

$$A[q_c] = \int_{t_I}^{t_F} dt \left(\frac{1}{2}\dot{q}_c^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q_c^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}q_c\dot{q}_c\Big|_{t_I}^{t_F} - \frac{1}{2}\int_{t_I}^{t_F} dt q_c(\ddot{q}_c + \omega^2 q_c) = \frac{1}{2}q_c\dot{q}_c\Big|_{t_I}^{t_F}$$

と変形できるが，式(3−6)を使って計算すれば

$$A[q_c] = \frac{1}{2}q_c\dot{q}_c\Big|_{t_I}^{t_F} = \frac{\omega}{2\sin\omega T}\{(q_F^2 + q_I^2)\cos\omega T - 2q_F q_I\} \tag{3-10}$$

が結論される．一方，以下に示すように

$$G(0,0;T) \equiv \int_{(t_I,0)}^{(t_F,0)} \mathfrak{D}q \exp\{iA[q]\} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin\omega T}} \tag{3-11}$$

が成立するので，これらを式(3−9)に代入すれば

$$G(q_F, q_I; T)$$
$$= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i\sin\omega T}}\exp\left(\frac{i\omega}{2\sin\omega T}\{(q_F^2 + q_I^2)\cos\omega T - 2q_F q_I\}\right) \tag{3-12}$$

を得る．

では式(3−11)を示そう．式(2−41)によれば $q_R \equiv q_F = 0, q_0 \equiv q_I = 0$ として

$$G(0,0;T) = \int_{(t_I,0)}^{(t_F,0)} \mathfrak{D}q \exp\{iA[q]\}$$
$$= \lim_{R\to\infty}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\frac{dq_r}{\sqrt{2\pi i\varepsilon_r}}\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r L_r\right)\delta(q_0 - q_I)$$
$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon_0}}\int\left\{\prod_{r=1}^{R-1}\frac{dq_r}{\sqrt{2\pi i\varepsilon_r}}\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r L_r\right) \tag{3-13}$$

と表現される（$\det W = W = 1$ に注意）．ただし

$$L_r \equiv L(\bar{q}_r, \dot{q}_r) = \frac{1}{2}\dot{q}_r^2 - \frac{1}{2}\omega^2\bar{q}_r^2$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon_r^2}(q_{r+1} - q_r)^2 - \frac{1}{2}\omega^2\left(\frac{q_{r+1} + q_r}{2}\right)^2 \tag{3-14}$$

である．計算を簡単にするためサンプル時刻 $t_1, t_2, \cdots, t_{R-1}$ を等間隔に設定すれば

$$\sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r L_r = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{r=0}^{R-1} \left\{ (q_{r+1} - q_r)^2 - \frac{1}{4}\omega^2\varepsilon^2 (q_{r+1} + q_r)^2 \right\}$$
$$\varepsilon \equiv T/R = (t_F - t_I)/R \tag{3-15}$$

となるが，

$$\alpha \equiv 1 - \frac{1}{4}\omega^2\varepsilon^2, \quad \beta \equiv 1 + \frac{1}{4}\omega^2\varepsilon^2 \tag{3-16}$$

を導入して $q_R = q_0 = 0$ を利用すれば，式(3－15)は

$$\begin{aligned}2\varepsilon \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon L_r &= \sum_{r=0}^{R-1} \{\alpha(q_{r+1}^2 + q_r^2) - 2\beta q_{r+1} q_r\} \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} (2\alpha q_r^2 - \beta q_{r+1} q_r - \beta q_r q_{r-1}) \\ &= \sum_{r,s=0}^{R-1} (2\alpha\delta_{r,s} - \beta\delta_{r,s-1} - \beta\delta_{r,s+1}) q_r q_s \\ &= \sum_{r=0}^{R-1} q_r [S_{R-1}]_{rs} q_s = \boldsymbol{q} \cdot S_{R-1} \boldsymbol{q}\end{aligned} \tag{3-17}$$

と表現できる．ただし，$R-1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ と $R-1$ 次の対称行列 S_{R-1} を

$$\boldsymbol{q} \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_{R-1})^t,$$
$$[S_{R-1}]_{rs} \equiv 2\alpha\delta_{r,s} - \beta\delta_{r,s-1} - \beta\delta_{r,s+1} \quad (r, s = 1 \sim R-1) \tag{3-18}$$

で定義した．$[S_{R-1}]_{rs}$ は行列 S_{R-1} の rs 要素を意味する．式(3－17)を使えば式(3－13)は

$$\begin{aligned}G(0,0;T) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi i\varepsilon)^{R/2}} \int d\boldsymbol{q} \exp\left(i\frac{1}{2\varepsilon}\boldsymbol{q}\cdot S_{R-1}\boldsymbol{q}\right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi i\varepsilon)^{R/2}} \frac{(2\pi i\varepsilon)^{(R-1)/2}}{(\det S_{R-1})^{1/2}} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon \det S_{R-1}}}\end{aligned} \tag{3-19}$$

と変形できる．ただし，積分には式(2－34)を利用した．

ところで，n 次の行列 S_n が $n-1$ 次の行列 S_{n-1} を使って

$$S_n = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\beta & 2\alpha & -\beta & 0 & \vdots \\ 0 & -\beta & 2\alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & -\beta \\ 0 & \cdots & 0 & -\beta & 2\alpha \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 2\alpha & -\beta & 0 & \cdots \\ \hline -\beta & & & \\ 0 & & S_{n-1} & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$$

として表現されることから

$$\det S_n = 2\alpha \det S_{n-1} + \beta \det \left(\begin{array}{c|ccc} -\beta & -\beta & 0 & \cdots \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & S_{n-2} & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$$
$$= 2\alpha \det S_{n-1} - \beta^2 \det S_{n-2}$$

が成立する．つまり，$\det S_n$ は差分方程式

$$\det S_{n+2} - 2\alpha \det S_{n+1} + \beta^2 \det S_n = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3-20}$$

を満足し，これを初期条件

$$\det S_1 = 2\alpha, \quad \det S_2 = \det \begin{pmatrix} 2\alpha & -\beta \\ -\beta & 2\alpha \end{pmatrix} = 4\alpha^2 - \beta^2 \tag{3-21}$$

の下に解けば

$$\det S_n = \frac{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad \lambda_\pm \equiv \alpha \pm i\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \tag{3-22}$$

を得る．ここで

$$\lambda_\pm = \beta \exp(\pm i\theta), \quad \theta = \tan^{-1}(\omega\varepsilon/\alpha) \tag{3-23}$$

と表現できることを利用すれば，式(3-22)によって

$$\det S_{R-1} = \frac{\lambda_+^R - \lambda_-^R}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{\beta^R(e^{iR\theta} - e^{-iR\theta})}{2i\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} = \frac{\beta^R \sin R\theta}{\omega\varepsilon} \tag{3-24}$$

が結論される．ところが，十分大きな R に対して

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega\varepsilon}{\alpha} = \tan^{-1}\frac{\omega T/R}{(1 - \omega^2 T^2/4R^2)} \approx \frac{\omega T}{R}$$

$$\beta^R = \left(1 + \frac{\omega^2 T^2}{4R^2}\right)^R \approx 1$$

が成立することから，式 (*3－19*) によって

$$G(0,0;T) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi i\varepsilon \det S_{R-1}}}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \beta^R \sin R\theta}} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega T}} \qquad (3-25)$$

が結論される．

3－2　生成汎関数

前章の 2-5 節で示したように，実効 Lagrangian L_J を

$$L_J(q,\dot{q},t) \equiv L(q,\dot{q}) + J(t)q = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + J(t)q \qquad (3-26)$$

で定義すれば，生成汎関数は L_J で記述される系の時間発展 Green 関数と一致する．調和振動子は標準形なので式 (2-42) が適用でき

$$Z[q_F,t_F;q_I,t_I;J] = \int_{(t_I,q_I)}^{(t_F,q_F)} \mathfrak{D}q \exp(iA_J[q])$$

$$A_J[q] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt L_J(q,\dot{q},t) \qquad (3-27)$$

と表現できる．前節と同様に式 (*3－5*) の境界条件を満足する古典経路を $q_c(t)$ とし，式 (*3－7*) によって $x(t)$ を定義すれば，$x(t)$ は式 (*3－8*) を満足し，$q_c(t)$ は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \longrightarrow \ddot{q} + \omega^2 q = J \qquad (3-28)$$

を満足するから

$$A_J[q] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt L_J(q,\dot{q},t) = \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 + Jq\right\}$$

$$= \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) + \left(\frac{1}{2}\dot{q}_c^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q_c^2 + Jq_c\right) + (\dot{x}\dot{q}_c - \omega^2 x q_c) + Jx\right\}$$

$$= A[x] + A_J[q_c] + x\dot{q}_c\Big|_{t_I}^{t_F} - \int_{t_I}^{t_F} dt x(\ddot{q}_c + \omega^2 q_c - J)$$

$$= A[x] + A_J[q_c] \qquad (3-29)$$

と書ける．ただし $A[.]$ は $L(q,\dot{q})$ を Lagrangian とした場合の作用積分を意味する．

式(3-29)を式(3-27)に代入し，前節と同様に $\mathfrak{D}q$ を $\mathfrak{D}x$ で置き換えれば

$$
\begin{aligned}
Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J] &= \int_{(t_I,0)}^{(t_F,0)} \mathfrak{D}x \exp\{i(A[x] + A_J[q_c])\} \\
&= \exp\{iA_J[q_c]\} \int_{(t_I,0)}^{(t_F,0)} \mathfrak{D}x \exp\{iA[x]\} \\
&= G(0,0;T) \exp\{iA_J[q_c]\}
\end{aligned}
\tag{3-30}
$$

を得る．$G(0,0;T)$ は既に計算済みだから，残るは古典経路に対する作用積分 $A_J[q_c]$ の計算だけである．

さて，古典経路 q_c は

$$
\begin{cases}
\ddot{q} + \omega^2 q = J \\
q(t_I) = q_I, \quad q(t_F) = q_F
\end{cases}
\tag{3-31}
$$

の解として決まるが，この境界値問題に対する伝搬関数 (propagator)[1)]，つまり

$$
\begin{cases}
(\partial_t^2 + \omega^2) G(t,t') = \delta(t-t') \\
G(t_I, t') = G(t_F, t') = 0
\end{cases}
\tag{3-32}
$$

の解 $G(t,t')$ を使えば，付録A-2に示すように

$$
q_c(t) = \int_{t_I}^{t_F} dt' G(t,t') J(t') + q_F G_t(t_F, t) - q_I G_t(t_I, t) \tag{3-33}
$$

と書ける．ただし $\partial_t G(t,t')$ を $G_t(t,t')$ と略記した．この性質を利用して作用積分 $A_J[q_c]$ を計算してみよう．まず，q_c が式(3-31)を満足することから

$$
\begin{aligned}
A_J[q_c] &= \int_{t_I}^{t_F} dt \left(\frac{1}{2}\dot{q}_c^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q_c^2 + J q_c \right) \\
&= \frac{1}{2} q_c \dot{q}_c \Big|_{t_I}^{t_F} - \frac{1}{2} \int_{t_I}^{t_F} dt q_c (\ddot{q}_c + \omega^2 q_c - J) + \frac{1}{2} \int_{t_I}^{t_F} dt\, J q_c \\
&= \frac{1}{2} \{ q_F \dot{q}_c(t_F) - q_I \dot{q}_c(t_I) \} + \frac{1}{2} \int_{t_I}^{t_F} dt\, J q_c
\end{aligned}
\tag{3-34}
$$

と変形できるが，式(3-33)によって

$$
\dot{q}_c(t) = \int_{t_I}^{t_F} dt' G_t(t,t') J(t') + q_F G_{t:t}(t_F, t) - q_I G_{t:t}(t_I, t)
$$

$$
\int_{t_I}^{t_F} dt\, J(t) q_c(t) = \int_{t_I}^{t_F} \int_{t_I}^{t_F} dt dt'\, J(t) G(t,t') J(t')
$$

---

1) 境界値問題では $G(t,t')$ はGreen関数と呼ばれることが多い．しかし量子力学関係の文献では時間発展Green関数と混同しないように「伝搬関数」と称するのが普通である．

$$+q_F \int_{t_I}^{t_F} dt G_t(t_F, t) J(t) - q_I \int_{t_I}^{t_F} dt G_t(t_I, t) J(t)$$

が成立するので，J に関する 0 次，1 次，2 次の項に分離して

$$\begin{aligned} A_J[q_c] &= A_0 + A_1 + A_2 \\ A_0 &\equiv \frac{1}{2}[q_F^2 G_{t:t}(t_F, t_F) - q_F q_I \{G_{t:t}(t_I, t_F) + G_{t:t}(t_F, t_I)\} \\ &\quad + q_I^2 G_{t:t}(t_I, t_I)] \\ A_1 &\equiv q_F \int_{t_I}^{t_F} dt'\, G_t(t_F, t') J(t') - q_I \int_{t_I}^{t_F} dt'\, G_t(t_I, t') J(t') \\ A_2 &\equiv \frac{1}{2} \int_{t_I}^{t_F} \int_{t_I}^{t_F} dt dt'\, J(t) G(t, t') J(t') \end{aligned} \tag{3-35}$$

と表現できる．ただし $G_{t:t}(t, t')$ は第一変数と第二変数でそれぞれ 1 回づつ偏微分して得られる関数 $\partial_t \partial_{t'} G(t, t')$ を意味する．ここで A_0 は $J = 0$ の場合，つまり外場のない単純な調和振動子に対する作用積分だから式 (3-10) の $A[q_c]$ に一致しなければならない．

$$A_0 = A[q_c] = \frac{\omega}{2 \sin \omega T}\{(q_F^2 + q_I^2) \cos \omega T - 2 q_F q_I\} \tag{3-36}$$

これらの結果を式 (3-30) に代入すれば，最終的に

$$\begin{aligned} Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J] &= G(0, 0; T) \exp\{i(A_0 + A_1 + A_2)\} \\ &= G(q_F, q_I; T) \exp\{i(A_1 + A_2)\} \end{aligned} \tag{3-37}$$

が結論される．

3-3 伝搬関数の具体的計算法

伝搬関数を計算するための手法としては，境界値問題の固有関数からなる正規直交関数系で展開する方法，Fourier 変換を利用する方法などがある．ここでは定数変化法による計算法を紹介する．定数変化法とは線形微分方程式の解法の一つであり，斉次方程式の一般解に含まれる積分定数を変化させる（時間の関数とする）ことによって非斉次方程式の解を構成する手法である．

ここでは，解くべき方程式は非斉次の線形微分方程式

$$\ddot{q} + \omega^2 q = J \tag{3-38}$$

である．定数変化法を適用するため斉次方程式

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \tag{3-39}$$

を考え，この方程式の互いに独立な二つの解 q_1, q_2 を任意に選ぶ．すると，式 (3-39) の一般解は c_1, c_2 を任意の定数として

$$q = c_1 q_1 + c_2 q_2 \tag{3-40}$$

と書ける．c_1, c_2 が定数ならば q は式 (3-39) の解であるが，この c_1, c_2 を時間の関数とすることによって q が式 (3-38) を満足するようにしよう，というのが定数変化法である．まず，c_1, c_2 には

$$\dot{c}_1 q_1 + \dot{c}_2 q_2 = 0 \tag{3-41}$$

を満足することを要求しよう．すると q の時間微分は

$$\dot{q} = \dot{c}_1 q_1 + c_1 \dot{q}_1 + \dot{c}_2 q_2 + c_2 \dot{q}_2 = c_1 \dot{q}_1 + c_2 \dot{q}_2$$

となり，再度微分すれば

$$\begin{aligned}\ddot{q} &= \dot{c}_1 \dot{q}_1 + c_1 \ddot{q}_1 + \dot{c}_2 \dot{q}_2 + c_2 \ddot{q}_2 \\ &= \dot{c}_1 \dot{q}_1 + \dot{c}_2 \dot{q}_2 + c_1(-\omega^2 q_1) + c_2(-\omega^2 q_2) \\ &= \dot{c}_1 \dot{q}_1 + \dot{c}_2 \dot{q}_2 - \omega^2 (c_1 q_1 + c_2 q_2) = \dot{c}_1 \dot{q}_1 + \dot{c}_2 \dot{q}_2 - \omega^2 q\end{aligned}$$

すなわち

$$\dot{c}_1 \dot{q}_1 + \dot{c}_2 \dot{q}_2 = \ddot{q} + \omega^2 q = J \tag{3-42}$$

を得る．つまり，式 (3-41)，(3-42) を満足するように c_1, c_2 を選べば q が式 (3-38) を満足するのである．式 (3-41)，(3-42) を行列形式で表現すれば

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix} \tag{3-43}$$

を得るが，仮定によって q_1, q_2 は独立だから Wronskian

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{vmatrix} \tag{3-44}$$

は零ではなく[1]，式 (3-43) 左辺の係数行列は可逆であって

1) q_1, q_2 は独立だから式 (3-39) の任意の解 q は c_1, c_2 を定数として式 (3-40) のように書ける．それゆえ，α, β を任意に指定しても初期条件 $\alpha \equiv q(0)$, $\beta \equiv \dot{q}(0)$ を満足するような c_1, c_2 が存在する筈である．このような c_1, c_2 は

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

を満足するが，仮に $\Delta = 0$ だとすれば α, β は任意に指定できない．それゆえ $\Delta \neq 0$ である．

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \dot{q}_2 & -q_2 \\ -\dot{q}_1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -q_2 J \\ q_1 J \end{pmatrix} \tag{3-45}$$

が結論される．これを満足する c_1, c_2 は

$$c_1(t) = -\Delta^{-1} \int^t d\tau q_2(\tau) J(\tau) = \Delta^{-1} \int_t d\tau q_2(\tau) J(\tau)$$

$$c_2(t) = \Delta^{-1} \int^t d\tau q_1(\tau) J(\tau) \tag{3-46}$$

と書ける．ここで Δ が定数である点に注意しよう．実際，

$$\dot{\Delta} = \dot{q}_1 \dot{q}_2 + q_1 \ddot{q}_2 - \dot{q}_2 \dot{q}_1 - q_2 \ddot{q}_1 = q_1(-\omega^2 q_2) - q_2(-\omega^2 q_1) = 0 \tag{3-47}$$

である．こうして，式 (3 − 38) の解は

$$q(t) = \Delta^{-1} q_1(t) \int_t d\tau q_2(\tau) J(\tau) + \Delta^{-1} q_2(t) \int^t d\tau q_1(\tau) J(\tau) \tag{3-48}$$

として与えられることになる．

さて，q_1, q_2 は互いに独立な斉次方程式の解であれば何でも良く，式 (3 − 48) の積分の上限・下限も全く任意であるが，q_1, q_2 としては

$$q_1(t_I) = 0, \quad q_2(t_F) = 0 \tag{3-49}$$

を満足するものを選び，積分の上限・下限をそれぞれ t_F, t_I としてみよう．すると

$$q(t) = \frac{q_1(t)}{\Delta} \int_t^{t_F} d\tau q_2(\tau) J(\tau) + \frac{q_2(t)}{\Delta} \int_{t_I}^t d\tau q_1(\tau) J(\tau) \tag{3-50}$$

であり，この q は

$$q(t_I) = q(t_F) = 0 \tag{3-51}$$

を満足することが分かる．つまり，式 (3 − 50) は境界条件 (3 − 51) を満足する微分方程式 (3 − 38) の解を与えるのである．特に $J(t) = \delta(t - t')$ とすれば，こちらは t の関数としての伝搬関数が満足すべき境界条件と微分方程式 (3 − 32) に他ならない．それゆえ，

$$G(t, t') = \frac{q_1(t)}{\Delta} \int_t^{t_F} d\tau q_2(\tau) \delta(\tau - t') + \frac{q_2(t)}{\Delta} \int_{t_I}^t d\tau q_1(\tau) \delta(\tau - t')$$

$$= \begin{cases} \Delta^{-1} q_1(t) q_2(t') & t < t' \\ \Delta^{-1} q_1(t') q_2(t) & t > t' \end{cases} \tag{3-52}$$

が成立する．あるいは，単位ステップ関数 $\theta(t)$

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{3-53}$$

を使えば

$$G(t,t') = \Delta^{-1} q_1(t) q_2(t') \theta(t'-t) + \Delta^{-1} q_1(t') q_2(t) \theta(t-t') \tag{3-54}$$

と書ける．

最後に伝搬関数の具体的な関数形を決めるため，式 (3-49) を満足する式 (3-39) の解として

$$q_1(t) = \sin\omega(t-t_I), \quad q_2(t) = \sin\omega(t_F - t) \tag{3-55}$$

を選ぼう[1]．このとき

$$\begin{aligned} \Delta \equiv \begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sin\omega(t-t_I) & -\sin\omega(t-t_F) \\ \omega\cos\omega(t-t_I) & -\omega\cos\omega(t-t_F) \end{vmatrix} \\ &= -\omega\sin\omega(t-t_I)\cos\omega(t-t_F) + \omega\cos\omega(t-t_I)\sin\omega(t-t_F) \\ &= -\omega\sin\omega(t_F-t_I) \end{aligned}$$

だから，式 (3-54) から

$$\begin{aligned} G(t,t') = &-\frac{\sin\omega(t-t_I)\sin\omega(t_F-t')}{\omega\sin\omega(t_F-t_I)}\theta(t'-t) \\ &-\frac{\sin\omega(t'-t_I)\sin\omega(t_F-t)}{\omega\sin\omega(t_F-t_I)}\theta(t-t') \end{aligned} \tag{3-56}$$

が結論される．

3-4　種々の境界条件

前述のように，生成汎関数は式 (3-26) で定義される実効 Lagrangian L_J で記述される系の時間発展 Green 関数と一致するから

$$Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J] = \langle q_F, t_F | q_I, t_I \rangle \tag{3-57}$$

1)　$q_1(t_F) = \sin\omega(t_F - t_I) = 0$ の場合は q_1 と q_2 が独立にならず，境界条件 (3-49) を満足する式 (3-39) の解は一意的には決まらない．

と表現できる．ただし，基底ケット $|q, t_0\rangle$ は L_J に対応する基底遷移作用素

$$\widehat{\Phi}_J(t, t_0) = T\left[\exp\left(i\int_{t_0}^{t} d\tau \widehat{H}_J(\tau)\right)\right]$$
$$\widehat{H}_J(\tau) = H(\widehat{q}(\tau), \widehat{p}(\tau)) - J(\tau)\widehat{q}(\tau) \tag{3-58}$$

によって

$$|q, t\rangle = \widehat{\Phi}_J(t, t_0)|q, t_0\rangle \tag{3-59}$$

に従って遷移してゆくものとする．つまり，生成汎関数とは外場 $J(t)$ の下における状態 $|q_I, t_I\rangle$ から状態 $|q_F, t_F\rangle$ への遷移振幅に他ならない．任意のケット $|\phi_I\rangle$ から任意のケット $|\phi_F\rangle$ への遷移振幅は $\langle\phi_F|\phi_I\rangle$ として定義されるが，$Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J]$ が分かっていれば

$$\langle\phi_F|\phi_I\rangle = \int dq_F dq_I \langle\phi_F|q_F, t_F\rangle\langle q_F, t_F|q_I, t_I\rangle\langle q_I, t_I|\phi_I\rangle$$
$$= \int dq_F dq_I \phi_F^*(q_F, t_F) Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J]\phi_I(q_I, t_I) \tag{3-60}$$

として計算できる．ここで

$$\phi_I(q_I, t_I) \equiv \langle q_I, t_I|\phi_I\rangle, \quad \phi_F(q_F, t_F) \equiv \langle q_F, t_F|\phi_F\rangle \tag{3-61}$$

はケット $|\phi_I\rangle, |\phi_F\rangle$ に対応する波動関数である．

例えば $\widehat{p}(t_I)$ の固有ケット $|p_I, t_I\rangle$ から $\widehat{p}(t_F)$ の固有ケット $|p_F, t_F\rangle$ への遷移振幅は，ϕ_I, ϕ_F が式 (1－43) で与えられることから

$$Z_N[p_F, t_F; p_I, t_I; J] \equiv \langle p_F, t_F|p_I, t_I\rangle$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int dq_F dq_I e^{-i(p_F q_F - p_I q_I)} Z[q_F, t_F; q_I, t_I; J]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\omega \sin\omega T}} \exp\left(\frac{i\{(p_F^2 + p_I^2)\cos\omega T - 2p_F p_I\}}{2\omega \sin\omega T}\right)\exp\{i(B_1 + B_2)\}$$
$$B_1 = \frac{-1}{\omega\sin\omega T}\int_{t_I}^{t_F} dt'\{p_F\cos\omega(t' - t_I) - p_I\cos\omega(t_F - t')\}J(t')$$
$$B_2 = \frac{1}{2}\int_{t_I}^{t_F} dt \int_{t_I}^{t_F} dt' J(t)N(t, t')J(t') \tag{3-62}$$

として計算される．ただし $N(t, t')$ は

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \omega^2)N(t, t') = \delta(t - t') \\ N_t(t_F, t') = N_t(t_I, t') = 0 \end{cases} \tag{3-63}$$

によって決まり，

$$N(t,t') = \frac{\cos\omega(t-t_I)\cos\omega(t_F-t')}{\omega\sin\omega T}\theta(t'-t) + \frac{\cos\omega(t'-t_I)\cos\omega(t_F-t)}{\omega\sin\omega T}\theta(t-t') \qquad (3-64)$$

として与えられる[1)]．$N(t,t')$ が Neumann 型の斉次境界条件式 (3-63) を満足することから $N(t,t')$ は Neumann 伝搬関数と呼ばれる．

一方，初期状態・終状態ともに調和振動子の基底状態

$$\phi_I \equiv \langle q_I, t_I|\phi_I\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega q_I^2}{2}\right)$$

$$\phi_F \equiv \langle q_F, t_F|\phi_F\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega q_F^2}{2}\right) \qquad (3-65)$$

である場合には式 (3-60) は

$$Z_F[t_F, t_I; J] = \langle\phi_F|\phi_I\rangle = e^{-i\omega T/2}\exp\left\{\frac{i}{2}\int_{t_I}^{t_F}dt\int_{t_I}^{t_F}dt' J(t)\Delta_F(t,t')J(t')\right\} \qquad (3-66)$$

となる．ただし $\Delta_F(t,t')$ は

$$\begin{cases} (\partial_t^2+\omega^2)\Delta_F(t,t') = \delta(t-t') \\ i\Delta_{Ft}(t_I,t') = -\omega\Delta_F(t_I,t'), \quad i\Delta_{Ft}(t_F,t') = \omega\Delta_F(t_F,t') \end{cases} \qquad (3-67)$$

によって決まり（$\Delta_{Ft}(t,t')$ は $\partial_t\Delta_F(t,t')$ を意味する），

$$\Delta_F(t,t') = \frac{i}{2\omega}\{e^{-i\omega(t'-t)}\theta(t'-t) + e^{-i\omega(t-t')}\theta(t-t')\} \qquad (3-68)$$

として与えられる[2)]．$\Delta_F(t,t')$ は Feynman 伝搬関数と呼ばれ，これに対応して式 (3-67) の境界条件は Feynman 型境界条件と呼ばれる．

さて，初期状態 $|\phi_I\rangle$ と終状態 $|\phi_F\rangle$ を指定するということは対象としている時間区間 $[t_I, t_F]$ の境界で特定の境界条件を規定することに他ならない．この境界条件を変えれば伝搬関数も変化するが，区間 $[t_I, t_F]$ の内部では伝搬関数は全て同じ微分方程式 (3-32)，(3-63)，(3-67) を満足する．異なるのは境界条件だけであり，斉次 Dirichlet 条件式 (3-32) を満足するのが $G(t,t')$，斉次 Neumann 条件式 (3-63) を満足するのが $N(t,t')$，そして Feynman 型境界条件式 (3-67) を満足するのが $\Delta_F(t,t')$ である．このように境界条件に応じて種々の伝搬関数が登場するが，散乱振幅の計算

---

1) 式 (3-62)，(3-63)，(3-64) の導出については本節の後半で詳述する．

2) 式 (3-66)，(3-67)，(3-68) の確認は読者の演習とする（章末の演習問題2）．

などでは基底状態から基底状態への遷移振幅が分かれば良く[1]，実際問題としては主として Feynman 伝播関数 $\Delta_F(t,t')$ が使われる．

では，参考までに式 (3-62)，(3-63)，(3-64) を導出しておこう．まず，式 (3-37) を式 (3-62) に代入すれば，A_2 が q_F, q_I に依存しないことから

$$Z_N[p_F,t_F;p_I,t_I;J] = \frac{1}{2\pi}G(0,0;T)e^{iA_2}\int dq_F dq_I e^{i(-p_F q_F + p_I q_I + A_0 + A_1)} \tag{3-69}$$

を得るが，式 (3-35) の A_1 を

$$A_1 = q_F I_F - q_I I_I,$$
$$I_F \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt' G_t(t_F,t')J(t'), \quad I_I \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt' G_t(t_I,t')J(t') \tag{3-70}$$

と表現し，

$$\boldsymbol{q} \equiv \begin{pmatrix} q_F \\ q_I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \equiv \begin{pmatrix} -p_F + I_F \\ p_I - I_I \end{pmatrix}, \quad Q \equiv \frac{\omega}{\sin\omega T}\begin{pmatrix} \cos\omega T & -1 \\ -1 & \cos\omega T \end{pmatrix} \tag{3-71}$$

を定義すれば

$$A_0 + A_1 - p_F q_F + p_I q_I = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\cdot Q\boldsymbol{q} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}$$
$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} + Q^{-1}\boldsymbol{a})\cdot Q(\boldsymbol{q} + Q^{-1}\boldsymbol{a}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot Q^{-1}\boldsymbol{a} \tag{3-72}$$

と表現できるので，ガウス積分の公式 (2-34) を利用し，$\det Q = -\omega^2$ と式 (3-11) を考慮すれば，式 (3-69) は

$$Z_N[p_F,t_F;p_I,t_I;J]$$
$$= \frac{1}{2\pi}G(0,0;T)e^{iA_2}e^{-i\boldsymbol{a}\cdot Q^{-1}\boldsymbol{a}/2}\int dq_F dq_I e^{i(\boldsymbol{q}+Q^{-1}\boldsymbol{a})\cdot Q(\boldsymbol{q}+Q^{-1}\boldsymbol{a})/2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi i\sin\omega T}}e^{i(A_2 - \boldsymbol{a}\cdot Q^{-1}\boldsymbol{a}/2)}\frac{2\pi i}{\sqrt{\det Q}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\omega\sin\omega T}}e^{i(A_2 - \boldsymbol{a}\cdot Q^{-1}\boldsymbol{a}/2)} \tag{3-73}$$

と計算される．ところで，式 (3-71) によれば

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot Q^{-1}\boldsymbol{a} = \frac{1}{2\omega\sin\omega T}\{[(p_F - I_F)^2 + (p_I - I_I)^2]\cos\omega T$$

1) 例えば，九後汐一郎：「ゲージ場の量子論」(新物理学シリーズ 23)，培風館 (1989)，72 ページ．

$$-2(p_F - I_F)(p_I - I_I)\} \tag{3-74}$$

と書けるから，式 (3-73) 右辺の指数関数の肩は

$$A_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot Q^{-1}\boldsymbol{a} = \frac{(p_F^2 + p_I^2)\cos\omega T - 2p_F p_I}{2\omega\sin\omega T} + \overline{B}_1 + \overline{B}_2 \tag{3-75}$$

と表現できる．ただし $\overline{B}_1, \overline{B}_2$ はそれぞれ J に関する 1 次の項と 2 次の項であり

$$\overline{B}_1 \equiv -\frac{p_F(I_F\cos\omega T - I_I) + p_I(I_I\cos\omega T - I_F)}{\omega\sin\omega T} \tag{3-76}$$

$$\overline{B}_2 \equiv A_2 + \frac{(I_F^2 + I_I^2)\cos\omega T - 2I_F I_I}{2\omega\sin\omega T} \tag{3-77}$$

として定義される．それゆえ，$\overline{B}_1, \overline{B}_2$ が B_1, B_2 に一致すれば式 (3-62) が示されたことになる．まず $\overline{B}_1 = B_1$ を示そう．式 (3-56) からは

$$G_t(t_F, t') = \frac{\sin\omega(t' - t_I)}{\sin\omega T}, \quad G_t(t_I, t') = -\frac{\sin\omega(t_F - t')}{\sin\omega T} \tag{3-78}$$

が導かれるから式 (3-70) によって

$$\begin{aligned}
&I_F\cos\omega T - I_I \\
&= \frac{1}{\sin\omega T}\int_{t_I}^{t_F} dt'\{\cos\omega T\sin\omega(t' - t_I) + \sin\omega(t_F - t')\}J(t') \\
&= \int_{t_I}^{t_F} dt'\cos\omega(t' - t_I)J(t') \\
&I_I\cos\omega T - I_F \\
&= \frac{1}{\sin\omega T}\int_{t_I}^{t_F} dt'\{-\cos\omega T\sin\omega(t_F - t') - \sin\omega(t' - t_I)\}J(t') \\
&= -\int_{t_I}^{t_F} dt'\cos\omega(t_F - t')J(t')
\end{aligned} \tag{3-79}$$

を得るが，これを式 (3-76) に代入すれば $\overline{B}_1 = B_1$ が結論される．次に $\overline{B}_2 = B_2$ を示す．式 (3-79) を使えば

$$\begin{aligned}
&(I_F^2 + I_I^2)\cos\omega T - 2I_F I_I \\
&= I_F(I_F\cos\omega T - I_I) + I_I(I_I\cos\omega T - I_F) \\
&= \int_{t_I}^{t_F} dt\int_{t_I}^{t_F} dt'\, J(t)\left\{\frac{\sin\omega(t - t_I)\cos\omega(t' - t_I)}{\sin\omega T}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\sin\omega(t_F - t)\cos\omega(t_F - t')}{\sin\omega T}\right\}J(t')
\end{aligned}$$

と変形でき，A_2 は $G(t,t')$ を使って式 (3-35) のように表現できるから

$$\eta(t,t') \equiv \frac{\sin\omega(t-t_I)\cos\omega(t'-t_I)+\sin\omega(t_F-t)\cos\omega(t_F-t')}{\omega\sin^2\omega T} \tag{3-80}$$

を定義すれば

$$\overline{B}_2 = \frac{1}{2}\int_{t_I}^{t_F} dt \int_{t_I}^{t_F} dt'\, J(t)\{G(t,t')+\eta(t,t')\}J(t') \tag{3-81}$$

と書ける．ところが $G(t,t')$ と $\eta(t,t')$ の和を計算し（$t<t'$ の場合と $t>t'$ の場合とを分けて計算する），式 (3-64) の右辺と比較すれば分かるように

$$N(t,t') = G(t,t') + \eta(t,t') \tag{3-82}$$

が成立し，式 (3-81) から $\overline{B}_2 = B_2$ が結論される．

演習問題

1. 伝搬関数 $G(t,t')$ を与える式 (3-56) から直接の計算によって式 (3-36) を導け．
2. 基底状態から基底状態への遷移振幅 $Z_F[t_F,t_I;J]$ を与える式 (3-66)，(3-68) を導き，伝搬関数 $\Delta_F(t,t')$ が式 (3-67) を満足することを示せ．
3. 3-3 節の手法を用いて式 (3-63) を解き，解が式 (3-64) の $N(t,t')$ に一致することを確認せよ．

第4章
Fermi 系

Bose 系の物理量は古典論では実数によって表され，量子論では複素 Hilbert 空間上の Hermite 作用素として表現される．一方，Fermi 系では実数や複素数に代わって Grassmann 数が主役を演ずる．Grassmann 数は q 数でないにも係らず反可換性を持つという特異な「数」であるが，整数から有理数が，有理数から実数が，実数から複素数が定義されるように，Grassmann 数もまた実数や複素数を使って定義されるのであり，反可換性もまた当然の結果として理解できる．本章の前半では Grassmann 数の構成法を詳説し，Fermi 系の古典論を経て量子論へと議論を進める．

4－1　Grassmann 代数

N 個の N 次元数ベクトル $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1\sim N}$ を横に並べて N 次正方行列 A を作れば，その行列式 $\det A$ は数ベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1\sim N}$ を一つの数に対応させる写像とみなせる．この写像を d_N と記し

$$d_N(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N) \equiv \det A, \quad A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N) \tag{4-1}$$

と表現しよう．周知のように，行列 A の第 n 列 $\boldsymbol{a}_n$ が二つのベクトル $\boldsymbol{a}'_n, \boldsymbol{a}''_n$ の線形結合として表される場合には

$$\begin{aligned} &d_N(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \alpha\boldsymbol{a}'_n + \beta\boldsymbol{a}''_n, \cdots, \boldsymbol{a}_N) \\ &\quad = \alpha d_N(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n, \cdots, \boldsymbol{a}_N) + \beta d_N(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}''_n, \cdots, \boldsymbol{a}_N) \end{aligned} \tag{4-2}$$

が成立するが，これは d_N が $\boldsymbol{a}_n$ に関して線形であることを意味している．この線形性は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N$ の全てに関して成立し，言わば「N 重に線形」であることから d_N は N次元数ベクトル空間 K_N の上の N 重線形形式と呼ばれる[1]．また，行列 A の任意の二つの列を入れ換えれば行列式は符号を変え

1) K_N の K は独語の Körper(体) に由来する．スカラの種類に応じ，実ベクトル空間は R_N，複素ベクトル空間は C_N で表すこともある．

$$d_N(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\cdots,\boldsymbol{a}_N)$$
$$=-d_N(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\cdots,\boldsymbol{a}_N)\qquad(1\leq m<n\leq N)\qquad(4-3)$$

が成立するが，これを「d_N は完全反対称である」と表現する．では，d_N 以外に完全反対称な N 重線形形式は存在するのだろうか．

ϕ_N を K_N 上の任意の完全反対称 N 重線形形式としよう．K_N に基底を一組選んで $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ とし，$\boldsymbol{a}_n$ をこの基底で展開して

$$\boldsymbol{a}_n=\sum_{m=1}^{N}a_{nm}^{(v)}\boldsymbol{v}_m\qquad(n=1\sim N)\qquad(4-4)$$

と表現すれば，ϕ_N の N 重線形性により

$$\phi_N(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_N)$$
$$=\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_N=1}^{N}a_{1m_1}^{(v)}a_{2m_2}^{(v)}\cdots a_{Nm_N}^{(v)}\phi_N(\boldsymbol{v}_{m_1},\boldsymbol{v}_{m_2},\cdots,\boldsymbol{v}_{m_N})$$
$$(4-5)$$

と表現できるが，ϕ_N は完全反対称だから $\boldsymbol{v}_{m_1},\boldsymbol{v}_{m_2},\cdots,\boldsymbol{v}_{m_N}$ の中に同じものがあれば $\phi_N(\boldsymbol{v}_{m_1},\boldsymbol{v}_{m_2},\cdots,\boldsymbol{v}_{m_N})$ は零であり，従って $(m_1,m_2,\cdots,m_N)$ が $(1,2,\cdots,N)$ の置換になっている場合だけが寄与をする．この置換を σ で表せば式 (4-5) は

$$\phi_N(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_N)=\sum_{\sigma}a_{1\sigma(1)}^{(v)}a_{2\sigma(2)}^{(v)}\cdots a_{N\sigma(N)}^{(v)}\phi_N(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\boldsymbol{v}_{\sigma(2)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(N)})$$
$$(4-6)$$

と書ける（$\sum_\sigma$ は全ての置換に関する和を意味する）．ここで再び ϕ_N の完全反対称性によって

$$\phi_N(\boldsymbol{v}_{\sigma(1)},\boldsymbol{v}_{\sigma(2)},\cdots,\boldsymbol{v}_{\sigma(N)})=\varepsilon(\sigma)\phi_N(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_N)\qquad(4-7)$$

が成立する．ただし，$\varepsilon(\sigma)$ は置換 σ のパリティであり σ が偶置換なら $\varepsilon(\sigma)=1$，奇置換ならば $\varepsilon(\sigma)=-1$ である．式 (4-7) を式 (4-6) に代入すれば

$$\phi_N(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_N)=\phi_N(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_N)\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}^{(v)}\cdots a_{N\sigma(N)}^{(v)}$$
$$=\phi_N(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_N)\det A^{(v)}\qquad(4-8)$$

を得る．ここで $A^{(v)}$ は $a_{mn}^{(v)}$ を mn 要素とする N 次正方行列である．ところが d_N

もまた完全反対称な N 重線形形式だから式 (4-8) が適用でき，これから

$$\phi_N(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N) = \gamma d_N(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N)$$
$$\gamma \equiv \phi_N(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N)/d_N(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N) \qquad (4-9)$$

が結論される．スカラ倍を別にすれば K_N 上の完全反対称 N 重線形形式は d_N 以外に存在しないのである．

今度は N 個に限らず，任意個数 (R 個) のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_r\}_{r=1\sim R}$ を一つの数に対応させる写像 $\phi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R)$ を考えてみよう．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_R$ の全てに関して線形ならば ϕ_R は K_N 上の R 重線形形式と呼ばれる．例えば K_N から $K = K_1$ (1 次元ベクトル空間) へ通常の線形写像は 1 重線形形式であり，二つの実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R_N$ を実数 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \in R$ に対応させる内積は K_N 上の二重線形形式である (通常は双線形形式と呼ばれる)．また，$\phi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R)$ が任意の二つのベクトルの入れ替えで符号を変えるとき，つまり

$$\phi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \cdots, \boldsymbol{a}_R)$$
$$= -\phi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \cdots, \boldsymbol{a}_R) \quad (1 \le m < n \le R) \qquad (4-10)$$

が成立するとき，ϕ_R は完全反対称であると言われる．

さて，K_N 上の完全反対称 R 重線形形式の集合を Λ^R と記そう．ξ_R, η_R が Λ^R に属する写像なら $\{\boldsymbol{a}_r\}_{r=1\sim R}$ を $\xi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R) + \eta_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R)$ に写す写像もまた Λ^R に属するため，この写像を Λ^R における ξ_R と η_R の和として定義できる．また，α を任意のスカラとすれば $\{\boldsymbol{a}_r\}_{r=1\sim R}$ を $\alpha\xi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R)$ に写す写像も Λ^R に属するから，この写像を Λ^R における ξ_R の α 倍として定義できる．つまり，任意の $\{\boldsymbol{a}_r\}_{r=1\sim R}$ に対して

$$(\xi_R + \eta_R)(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R) = \xi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R) + \eta_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R)$$
$$(\alpha\xi_R)(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R) = \alpha\xi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R) \qquad (4-11)$$

が成立するように和 $\xi_R + \eta_R$ とスカラ倍 $\alpha\xi_R$ が定義されるのである．容易に示されるように，こうして定義された和とスカラ倍に関して Λ^R はベクトル空間を成す．

次に，ベクトル空間 Λ^R の次元について考えよう．$\phi_R \in \Lambda^R$ ならば式 (4-5) と同様に

$$\phi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R) = \sum_{m_1, \cdots, m_R = 1}^{R} a_{1m_1}^{(v)} \cdots a_{Rm_R}^{(v)} \phi_R(\boldsymbol{v}_{m_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{m_R}) \qquad (4-12)$$

を得るが，ϕ_R の完全反対称性によって $(m_1, \cdots, m_R)$ の中に同じ数が含まれない項

だけが残る．また，$(m_1, \cdots, m_R)$ に含まれる数値が全て互いに異なる場合，それらを小さい順に並べたものを $(n_1, \cdots, n_R) \equiv \mathrm{sort}(m_1, \cdots, m_R)$ とし[1]，$(n_1, \cdots, n_R)$ を $(m_1, \cdots, m_R)$ に並び替える置換を $\sigma^{n_1, \cdots, n_R}_{m_1, \cdots, m_R}$ と記せば

$$\phi_R(\boldsymbol{v}_{m_1}, \boldsymbol{v}_{m_2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{m_R}) = \varepsilon(\sigma^{n_1, n_2, \cdots, n_R}_{m_1, m_2, \cdots, m_R})\phi_R(\boldsymbol{v}_{n_1}, \boldsymbol{v}_{n_2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_R})$$

が成立するため，式 (4-12) は

$$\begin{aligned}&\phi_R(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_R)\\ &= \sum_{1 \le n_1 < \cdots < n_R \le N} \phi_R(\boldsymbol{v}_{n_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_R}) \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma^{n_1, \cdots, n_R}_{m_1, \cdots, m_R}) a^{(v)}_{1m_1} \cdots a^{(v)}_{Rm_R}\end{aligned} \tag{4-13}$$

と表現できる．ただし，$\sum_\sigma$ は $R!$ 通り存在する $(n_1, \cdots, n_R)$ の置換全てに対する和を意味する．こうして，$R \le N$ ならば ${}_NC_R = N!/R!(N-R)!$ 個のスカラ

$$\begin{aligned}&\gamma_{n_1, n_2, \cdots, n_R} \equiv \phi_R(\boldsymbol{v}_{n_1}, \boldsymbol{v}_{n_2}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_R})\\ &\quad (1 \le n_1 < n_2 < \cdots < n_R \le N)\end{aligned} \tag{4-14}$$

によって任意の $\{\boldsymbol{a}_r\}_{r=1\sim R}$ に対する ϕ_R の値が決まることになり，Λ^R の次元に関して

$$\dim(\Lambda^R) = {}_NC_R = N!/R!(N-R)! \qquad (R = 1 \sim N) \tag{4-15}$$

が結論される．一方，$R > N$ ならば $(m_1, \cdots, m_R)$ の中には必ず同じ数が含まれるため式 (4-12) 右辺の各項は全て零である．従って，Λ^R は零元 (全ての $\{\boldsymbol{a}_r\}_{r=1\sim R}$ に零を対応させる写像) のみから成り，

$$\dim(\Lambda^R) = 0 \qquad (R > N) \tag{4-16}$$

を得る．このため，以後は主として $R \le N$ の場合だけを考えることにする．

さて，前述のように Λ^R の元 ϕ_R は式 (4-14) に示すスカラによって決まるが，これら ${}_NC_R$ 個のスカラの中で $(n_1, \cdots, n_R)$ が $(k_1, \cdots, k_R)$ に一致した場合だけが 1 であり，他がすべて零となるような Λ^R の元を $\psi_{k_1, k_2, \cdots, k_R}$ と記そう．つまり，

$$\psi_{k_1, \cdots, k_R}(\boldsymbol{v}_{n_1}, \cdots, \boldsymbol{v}_{n_R}) = \begin{cases} 1 & (n_1, \cdots, n_R) = (k_1, \cdots, k_R) \\ 0 & (n_1, \cdots, n_R) \ne (k_1, \cdots, k_R) \end{cases}$$

1) 整数の組 $(m_1, \cdots, m_R)$ に対し，その構成要素を大きさの順に並べたものを $\mathrm{sort}(m_1, \cdots, m_R)$ と記す．

$$\begin{pmatrix} 1 \le n_1 < \cdots < n_R \le N \\ 1 \le k_1 < \cdots < k_R \le N \end{pmatrix} \tag{4-17}$$

である．$\psi_{k_1,k_2,\cdots,k_R}$ は $k_1,\cdots,k_R$ が小さい順に並んだ ${}_NC_R$ 通りの場合に限って定義される点に注意しよう．式(4－17)では $n_1,\cdots,n_R$ もまた小さい順に並んでいる場合だけを規定しているが，$\psi_{k_1,\cdots,k_R}$ を定義するにはこれで十分である．なぜなら，$\psi_{k_1,\cdots,k_R}$ の完全反対称性から任意の整数の組 $(m_1,\cdots,m_R)$ に対する $\psi_{k_1,\cdots,k_R}(v_{m_1},\cdots,v_{m_R})$ の値が確定するからである．実際，$(n_1,\cdots,n_R)\equiv\mathrm{sort}(m_1,\cdots,m_R)$ とすれば

$$\psi_{k_1,\cdots,k_R}(v_{m_1},\cdots,v_{m_R}) = \varepsilon(\sigma^{n_1,\cdots,n_R}_{m_1,\cdots,m_R})\psi_{k_1,\cdots,k_R}(v_{n_1},\cdots,v_{n_R})$$

であり，式(4－17)によって

$$\psi_{k_1,\cdots,k_R}(v_{m_1},\cdots,v_{m_R}) = \begin{cases} \varepsilon(\sigma^{n_1,\cdots,n_R}_{m_1,\cdots,m_R}) & (n_1,\cdots,n_R)=(k_1,\cdots,k_R) \\ 0 & (n_1,\cdots,n_R)\ne(k_1,\cdots,k_R) \end{cases}$$

を得る．それゆえ，式(4－13)を導出したのと同様に

$$\psi_{k_1,\cdots,k_R}(a_1,a_2,\cdots,a_R) = \sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma^{k_1,k_2,\cdots,k_R}_{m_1,m_2,\cdots,m_R})a^{(v)}_{1m_1}a^{(v)}_{2m_2}\cdots a^{(v)}_{Rm_R}$$

が導かれ，これを式(4－13)に代入すれば，式(4－14)で定義される $\gamma_{n_1,n_2,\cdots,n_R}$ を使って

$$\begin{aligned}&\phi_R(a_1,a_2,\cdots,a_R)\\ &\quad= \sum_{1\le n_1<\cdots<n_R\le N}\gamma_{n_1,n_2,\cdots,n_R}\psi_{n_1,\cdots,n_R}(a_1,a_2,\cdots,a_R)\end{aligned} \tag{4-18}$$

と書けるが，これが任意の $\{a_r\}_{r=1\sim R}$ に関して成立することから

$$\phi_R = \sum_{1\le n_1<\cdots<n_R\le N}\gamma_{n_1,n_2,\cdots,n_R}\psi_{n_1,\cdots,n_R} \tag{4-19}$$

が結論される．結局，Λ^R の任意の元 ϕ_R が $\{\psi_{n_1,\cdots,n_R}\}$ の線形結合で表現されることになり，$\{\psi_{n_1,\cdots,n_R}\}$ は Λ^R の基底を成すことが分かる[1)].

さて，$R=1$ の場合を考えると，Λ^1 とは K_N から K への線形写像の集合が作るベクトル空間，すなわち双対空間に他ならない．そして，式(4－17)は

$$\psi_k(v_n) = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & n=k \\ 0 & n\ne k \end{cases} \quad (1\le k\le N) \tag{4-20}$$

---

1)　$\{\psi_{n_1,\cdots,n_R}\}_{1\le n_1<\cdots<n_R\le N}$ の線形独立性は容易に証明できる．

と書けるから $\{\psi_k\}_{k=1\sim N}$ とは $\{v_n\}_{n=1\sim N}$ の双対基底のことである．この双対基底を使ってベクトルの組 $\{a_r\}_{r=1\sim R}$ を一つの数に写す写像 $\Psi_{l_1,\cdots,l_R}$ を

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}(a_1,a_2,\cdots,a_R)\equiv\det\begin{pmatrix}\psi_{l_1}(a_1) & \psi_{l_1}(a_2) & \cdots & \psi_{l_1}(a_R)\\ \psi_{l_2}(a_1) & \psi_{l_2}(a_2) & \cdots & \psi_{l_2}(a_R)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_{l_R}(a_1) & \psi_{l_R}(a_2) & \cdots & \psi_{l_R}(a_R)\end{pmatrix} \tag{4-21}$$

として定義すれば，$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}$ は $a_1,a_2,\cdots,a_R$ の全てに関して線形であり，しかも完全反対称[1]だから Λ_R に属する．また，添字 $(l_1,\cdots,l_R)$ に関しても完全反対称であり，

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_m,\cdots,l_n,\cdots,l_R}=-\Psi_{l_1,\cdots,l_n,\cdots,l_m,\cdots,l_R}\quad(1\le m,n\le N) \tag{4-22}$$

が成立することから，

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}=0\quad(l_1,\cdots,l_R)\text{が同じ数を含む場合} \tag{4-23a}$$

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}=\varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1,\cdots,l_R})\psi_{k_1,\cdots,k_R}\quad(l_1,\cdots,l_R)\text{が全て異なる場合}$$
$$(k_1,\cdots,k_R)\equiv\mathrm{sort}(l_1,\cdots,l_R) \tag{4-23b}$$

が結論される[2]．特に $(l_1,\cdots,l_R)=\mathrm{sort}(l_1,\cdots,l_R)$ の場合には，式(4-23b)は

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}=\psi_{l_1,\cdots,l_R}\qquad(1\le l_1<\cdots<l_R\le N) \tag{4-24}$$

と書けるから $\{\Psi_{l_1,\cdots,l_R}\}_{1\le l_1<\cdots<l_R\le N}$ は Λ^R の基底を成すことが分かる．

ところで，$R\neq S$ ならば Λ^R と Λ^S は全く異なるベクトル空間であり，Λ^R の元と Λ^S の元との線形結合に関しては何も規定されていない．線形結合に意味を持たせるには Λ^R と Λ^S の両方を部分空間として含む，より大きなベクトル空間を考えれば良い．つまり，第1要素が Λ^R の元 ξ_R であり，第2要素が Λ^S の元 ξ_S であるような全ての順序対 (ξ_R,ξ_S) の集合が作るベクトル空間 $\Lambda^R\times\Lambda^S$ である．実際，

$$(\xi_R,\xi_S)+(\eta_R,\eta_S)\equiv(\xi_R+\eta_R,\xi_S+\eta_S),\quad \alpha(\xi_R,\xi_S)\equiv(\alpha\xi_R,\alpha\xi_S) \tag{4-25}$$

として定義される和とスカラ倍に関して $\Lambda^R\times\Lambda^S$ はベクトル空間を成し，Λ^R と Λ^S の直積空間と呼ばれる．同じ記号 "+" を使っていても，$\xi_R+\eta_R$ は Λ^R における和

1) $a_1,a_2,\cdots,a_R$ の入れ替えは式(4-21)右辺の行列の列の入れ替えを意味し，添字 $(l_1,\cdots,l_R)$ の入れ替えは行の入れ替えを意味する点に注意しよう．

2) 章末の演習問題1参照

であり，$\xi_S + \eta_S$ は Λ^S における和，そして $(\xi_R, \xi_S) + (\eta_R, \eta_S)$ は $\Lambda_R \times \Lambda_S$ における和である点に注意しよう．スカラ倍に関しても同様である．$(\xi_R, 0)$ を ξ_R と同一視し，$(0, \xi_S)$ を ξ_S と見做せば，元々は異なるベクトル空間に属していた ξ_R と ξ_S に対して線形結合

$$\alpha\xi_R + \beta\xi_S \equiv \alpha(\xi_R, 0) + \beta(0, \xi_S) = (\alpha\xi_R, \beta\xi_S) \in \Lambda^R \times \Lambda^S \tag{4-26}$$

が定義されたことになる[1]．また，Λ^R と Λ^S の次元を D_R, D_S と記し，両者の基底をそれぞれ $\{\rho_r\}_{r=1\sim D_R}$，$\{\sigma_s\}_{s=1\sim D_S}$ とすれば，$\{(\rho_r, 0)\}_{r=1\sim D_R}$ と $\{(0, \sigma_s)\}_{s=1\sim D_S}$ が $\Lambda^R \times \Lambda^S$ の基底を成すから

$$\dim(\Lambda^R \times \Lambda^S) = \dim(\Lambda^R) + \dim(\Lambda^S) \tag{4-27}$$

が成立する．こうした議論を 3 個以上のベクトル空間 Λ^R，Λ^S，$\Lambda^T, \cdots$ の直積空間 $\Lambda^R \times \Lambda^S \times \Lambda^T \times \cdots$ に一般化するのに特に問題はないだろう．

Λ^R は $R \geq 1$ に対して定義されていたが，便宜上 Λ^0 を 1 次元数ベクトル空間 $K_1 = K$ として定義し[2]，$N+1$ 個のベクトル空間 $\{\Lambda^R\}_{R=0\sim N}$ の直積空間を $\mathfrak{G}$ と記すことにする．すなわち

$$\mathfrak{G} \equiv \Lambda^0 \times \Lambda^1 \times \cdots \times \Lambda^N \tag{4-28}$$

である．Λ^0 の元は $1 \in K_1$ のスカラ倍として表現され，$R \geq 1$ に対する Λ^R の元は $\Psi_{l_1,\cdots,l_R}$ の線形結合で表されることから，$\mathfrak{G}$ とは

$$1, \{\Psi_{l_1}\}_{1\leq l_1\leq N}, \{\Psi_{l_1,l_2}\}_{1\leq l_1,l_2\leq N}, \cdots, \{\Psi_{l_1,\cdots,l_N}\}_{1\leq l_1,l_2,\cdots,l_N\leq N} \tag{4-29}$$

の全ての線形結合からなるベクトル空間のことである．ただし，式 (4-29) に示した $\sum_{R=0}^N N^R = (N^{N+1}-1)/(N-1)$ 個の元の多くは零であり，零でない元に限っても線形従属である点に注意しよう．実際，${}_NC_R$ 個の元 $\{\Psi_{l_1,\cdots,l_R}\}_{1\leq l_1<\cdots<l_R\leq N}$ が Λ^R の基底を成すから，$\mathfrak{G}$ を張るには $\sum_{R=0}^N {}_NC_R = 2^N$ 個の元

$$1, \{\Psi_{l_1}\}_{1\leq l_1\leq N}, \{\Psi_{l_1,l_2}\}_{1\leq l_1<l_2\leq N}, \cdots, \{\Psi_{l_1,\cdots,l_N}\}_{1\leq l_1<l_2<,\cdots,<l_N\leq N} \tag{4-30}$$

1) Λ^R と Λ^S を $\Lambda^R \times \Lambda^S$ の部分空間と考えると，$\Lambda^R \times \Lambda^S$ の任意の元 (ξ_R, ξ_S) は Λ^R の元 $(\xi_R, 0)$ と Λ^S の元 $(0, \xi_S)$ の和として一意的に表現される．従って $\Lambda^R \times \Lambda^S$ は Λ^R と Λ^S の直和 $(\Lambda^R \times \Lambda^S = \Lambda^R + \Lambda^S)$ でもある．

2) この理由は後ほど明らかとなる．

だけで十分である[1]．この事実は式(4－27)を一般化した関係式

$$\dim \mathfrak{G} = \dim \Lambda^0 + \dim \Lambda^1 + \cdots + \dim \Lambda^N = \sum_{R=0}^{N} {}_N C_R = 2^N \qquad (4-31)$$

からも確認される．

さて，和とスカラ倍が定義されたベクトル空間 $\mathfrak{G}$ に外積 (exterior product) と呼ばれる新たな2項演算 “$\wedge$” を導入しよう．2項演算とは $\mathfrak{G}$ の元の組 (a,b) に $\mathfrak{G}$ の元 c を対応させる規則の事であり，この c を $\mathsf{a}\wedge\mathsf{b}$ と記すだけのことである．従って，全ての $\mathsf{a},\mathsf{b}\in\mathfrak{G}$ に対して $\mathsf{c}\equiv\mathsf{a}\wedge\mathsf{b}$ を決めれば2項演算 “$\wedge$” が定義されたことになる．そのため，この演算は $1\in\mathfrak{G}$ を単位元とし[2]，分配則や結合則を満足するものとする．つまり，$\mathfrak{G}$ の任意の元 g に対して

$$1\wedge\mathsf{g} = \mathsf{g}\wedge 1 = \mathsf{g} \qquad (4-32a)$$

が成立し，$\mathsf{g}_1,\mathsf{g}_2,\mathsf{g}_3\in\mathfrak{G}$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathsf{g}_1\wedge(\mathsf{g}_2+\mathsf{g}_3) = \mathsf{g}_1\wedge\mathsf{g}_2+\mathsf{g}_1\wedge\mathsf{g}_3 \\ &(\mathsf{g}_2+\mathsf{g}_3)\wedge\mathsf{g}_1 = \mathsf{g}_2\wedge\mathsf{g}_1+\mathsf{g}_3\wedge\mathsf{g}_1 \qquad (4-32b) \\ &\mathsf{g}_1\wedge(\mathsf{g}_2\wedge\mathsf{g}_3) = (\mathsf{g}_1\wedge\mathsf{g}_2)\wedge\mathsf{g}_3 \qquad (4-32c) \end{aligned}$$

が成立するものとしよう．また，$\mathsf{g}_1,\mathsf{g}_2\in\mathfrak{G}$ とスカラ α_1，α_2 に関しては

$$(\alpha_1\mathsf{g}_1)\wedge(\alpha_2\mathsf{g}_2) = \alpha_1\alpha_2(\mathsf{g}_1\wedge\mathsf{g}_2) \qquad (4-32d)$$

が成立するものとし，1以外の単項式の間の演算を

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}\wedge\Psi_{m_1,\cdots,m_S} \equiv \Psi_{l_1,\cdots,l_R,m_1,\cdots,m_S} \qquad (4-32e)$$

として定義する[3]．全ての $\mathsf{a},\mathsf{b}\in\mathfrak{G}$ に対して $\mathsf{a}\wedge\mathsf{b}$ を指定するには式(4－32)だけで十分である．なぜなら a，b は共に式(4－30)に示す $\mathfrak{G}$ の基底で展開され，式(4－32b)によってスカラを含んだ単項式の間の演算に分解され，更には式(4－32d)によってスカラを含まない単項式の間の演算に帰着し，単項式の間の演算は式(4－32a)と式(4－32e)によって定義されるからである．例えば

$$\mathsf{a} = 3+2\Psi_{1,3}+\Psi_{2,3}, \quad \mathsf{b} = \Psi_2 - 5\Psi_{1,2,3} \qquad (4-33)$$

---

1) $\{\Psi_{l_1,\cdots,l_N}\}_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_N\le N}$ に含まれるのは一つの要素 $\Psi_{1,2,\cdots,N}$ だけである．
2) $1\in\mathfrak{G}$ とは正確には $1\equiv(1,0_1,0_2,\cdots,0_N)$ のことである．ここで 0_R は Λ^R の零元を意味する．
3) 式(4－32e)で $R+S>N$ ならば $\Psi_{l_1,\cdots,l_R,m_1,\cdots,m_S}=0$ となる点に注意しよう．$(l_1,\cdots,l_R,m_1,\cdots,m_S)$ の中に必ず同じ数値が含まれるからである．

の場合には

$$\mathsf{a} \wedge \mathsf{b} = 3\Psi_2 - 15\Psi_{1,2,3} + 2\Psi_{1,3,2} - 10\Psi_{1,3,1,2,3} + \Psi_{2,3,2} - 5\Psi_{2,3,1,2,3}$$
$$= 3\Psi_2 - 17\Psi_{1,2,3} \qquad (4-34)$$

となる．$\Psi_{1,3,1,2,3}$ と $\Psi_{2,3,2}$，そして $\Psi_{2,3,1,2,3}$ は同じ因子を含むから零であり，また $\Psi_{1,3,2} = -\Psi_{1,2,3}$ となることに注意しよう．式 (4 − 30) に示す基底を使えば $\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathfrak{G}$ の展開は一意的だが，式 (4 − 29) の元では無数の展開が可能である．しかし，どのように展開しても $\mathsf{a} \wedge \mathsf{b}$ の計算結果は不変である．例えば (4 − 33) の a を

$$\mathsf{a} = 3 + \Psi_{1,3} - \Psi_{3,1} + \Psi_{2,3} + 9\Psi_{2,3,2} \qquad (4-35)$$

と表現しても式 (4 − 34) と同じ結果を得る．

ところで，式 (4 − 24) によれば

$$\Psi_l = \psi_l \qquad (1 \le l \le N)$$

が成立するから，式 (4 − 32e) によれば

$$\Psi_{l_1,l_2} = \Psi_{l_1} \wedge \Psi_{l_2} = \psi_{l_1} \wedge \psi_{l_2}$$
$$\Psi_{l_1,l_2,l_3} = \Psi_{l_1,l_2} \wedge \Psi_{l_3} = (\Psi_{l_1} \wedge \Psi_{l_2}) \wedge \Psi_{l_3} = \Psi_{l_1} \wedge \Psi_{l_2} \wedge \Psi_{l_3}$$
$$= \psi_{l_1} \wedge \psi_{l_2} \wedge \psi_{l_3}$$
$$\cdots$$
$$\Psi_{l_1,l_2,\cdots,l_N} = \psi_{l_1} \wedge \psi_{l_2} \wedge \cdots \wedge \psi_{l_N} \qquad (4-36)$$

が結論される．つまり，式 (4 − 29) に登場する 1 以外の単項式 $\Psi_{l_1,\cdots,l_R}$ は双対空間 K_N^* の基底である $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ に適当な回数の外積演算を施すことによって導出されるが，この事実を「$\mathfrak{G}$ は 1 と K_N^* によって生成される」と表現する．このように，式 (4 − 32) の性質を持つ外積演算の導入によって環 (ring) の構造[1)]を付与され，単位元 1 と双対空間 K_N^* によって生成される $\mathfrak{G}$ を K_N^* 上の Grassmann 代数あるいは外積代数と呼び，$\mathfrak{G}(K_N^*)$ と記すことにする[2)]．また，通常の数を c 数，Hilbert 空間上の作用素を q 数と呼んだことに対応して $\mathfrak{G}(K_N^*)$ の元を e 数と呼ぶことにする[3)]．ただし $\mathfrak{G}(K_N^*)$ には除算が定義されていないため，「数」とは言っても実数や複素数などと

1)　一般に，可換で結合則を満足する演算 “+” と式 (4 − 32a)，(4 − 32b)，(4 − 32c) を満足する演算 “∧” が定義された集合は「環を成す」と表現される．

2)　ここでは N 次元数ベクトル空間 K_N から出発して Grassmann 代数を構成したが，任意の抽象ベクトル空間 V から出発することも可能である．その場合に得られる Grassmann 代数は $\mathfrak{G}(V^*)$ と記され，双対空間 V^* 上の Grassmann 代数と称される．

3)　「e 数」とは「exterior algebra (外積代数) に属する数」という意味．

は大きく異なる点に注意しよう．

4－2　Grassmann 数

式 (4－28) に示すように $\mathfrak{G}(K_N^*)$ は $\Lambda^0, \Lambda^1, \cdots, \Lambda^N$ の直積だから，任意の $\mathsf{a} \in \mathfrak{G}(K_N^*)$ は

$$\mathsf{a} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N), \quad \lambda_n \in \Lambda^n$$

と表現できるが，λ_1 以外は全て零であるような e 数の集合

$$\Gamma_N \equiv \{\mathsf{a} | \mathsf{a} = (0_0, \lambda_1, 0_2, 0_3, \cdots, 0_N), \lambda_1 \in K_N^*\} \quad (0_n \text{は} \Lambda^n \text{の零元}) \quad (4-37)$$

を考えると ($\Lambda^1 = K_N^*$ に注意) Γ_N は $\mathfrak{G}(K_N^*)$ の部分空間であり，その次元は K_N^* の次元と同じく N である．この部分空間 Γ_N の元を Grassmann 数と呼ぶ．

ところで，$\lambda_1 \in K_N^*$ を $(0_0, \lambda_1, 0_2, \cdots, 0_N) \in \Gamma_N$ と同一視すれば，K_N^* は形式上は Γ_N と「同じ」ベクトル空間と見なせる[1)]．前節の最後で「Grassmann 代数 $\mathfrak{G}(K_N^*)$ は 1 と K_N^* によって生成される」と述べたが，その際の K_N^* とは数ベクトル空間 K_N の単なる双対空間ではなく，Γ_N と同一視した場合の K_N^* のことである．この意味で「Grassmann 数とは K_N^* の元である」と考えても良い．以後はこの解釈に従って議論を進める．また，前節では $\mathfrak{G}(K_N^*)$ に定義された外積演算を "$\wedge$" と記していたが，以後はこれを省略し，二つの e 数の間の外積 $\mathsf{a} \wedge \mathsf{b}$ を単に ab と記すことにする．それゆえ，$\mathfrak{G}(K_N^*)$ には

$\alpha\beta$: スカラの間の積 (実数や複素数に関する通常の積)

$\alpha\mathsf{a}$: ベクトル空間としての $\mathfrak{G}(K_N^*)$ に属する a のスカラ倍

ab : Grassmann 代数としての $\mathfrak{G}(K_N^*)$ に属する a, b の外積

という 3 種類の積が定義され，それらがすべて同じ記法で表現されることになる．

さて，式 (4－30) に示した 2^N 個の e 数は $\mathfrak{G}(K_N^*)$ の基底を成し，式 (4－36) によれば

$$\Psi_{l_1, l_2, \cdots, l_R} = \psi_{l_1} \wedge \psi_{l_2} \wedge \cdots \wedge \psi_{l_R} = \psi_{l_1}\psi_{l_2} \cdots \psi_{l_R}$$

---

1) $\varphi(\lambda_1) = (0_0, \lambda_1, 0_2, \cdots, 0_N)$ で定義される K_N^* から Γ_N の写像 φ は線形である．つまり，任意のスカラ α と $\xi, \eta \in K_N^*$ に対して $\varphi(\xi + \eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$，$\varphi(\alpha\xi) = \alpha\varphi(\xi)$ が成立し，従ってベクトル空間に定義された全ての演算 (和とスカラ倍) を保存する．また φ は 1 対 1 (可逆) だから，K_N^* における全ての計算は φ を介して Γ_N の計算に置き換えられ，Γ_N に関する全ての結果は逆写像 φ^{-1} によって K_N^* に関する結果として成立する．このように，可逆な線形写像 φ で結ばれる二つのベクトル空間 K_N^*, Γ_N は「同型」であり，ベクトル空間としては区別できない．

と書けるから，任意の e 数 $\mathsf{a} \in \mathfrak{G}(K_N^*)$ は $a_0, a_{n_1}, a_{n_1,n_2}, \cdots, a_{n_1,n_2,\cdots,n_N}$ を c 数として

$$\mathsf{a} = a_0 + \sum_{1 \leq n_1 \leq N} a_{n_1}\psi_{n_1} + \sum_{1 \leq n_1 \leq n_2 \leq N} a_{n_1,n_2}\psi_{n_1}\psi_{n_2} + \cdots + \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_N \leq N} a_{n_1,n_2,\cdots,n_N}\psi_{n_1}\psi_{n_2}\cdots\psi_{n_N} \tag{4-38}$$

と展開できることになる．そして，式(4-22)に示されるように単項式 $\psi_{n_1}\psi_{n_2}\cdots\psi_{n_R}$ は $(n_1, n_2, \cdots, n_R)$ に関して完全反対称であり，

$$(\psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_R})(\psi_{n_1}\psi_{n_2}\cdots\psi_{n_S}) = (-1)^{RS}(\psi_{n_1}\psi_{n_2}\cdots\psi_{n_S})(\psi_{m_1}\psi_{m_2}\cdots\psi_{m_R}) \tag{4-39}$$

を得るが，この関係式は任意の Grassmann 数に対しても成立する．実際，$R+S$ 個の Grassmann 数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_R, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_S$ を K_N^* の基底 $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ で展開して

$$\xi_r = \sum_{n=1}^{N} \alpha_{rn}\psi_n \quad (r = 1 \sim R), \quad \eta_s = \sum_{n=1}^{N} \beta_{sn}\psi_n \quad (s = 1 \sim S)$$

とすれば，式(4-39)によって

$$\begin{aligned}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_R)(\eta_1\eta_2\cdots\eta_S) &= \sum \alpha_{1m_1}\cdots\alpha_{Rm_R}\beta_{1n_1}\cdots\beta_{Sn_S}(\psi_{m_1}\cdots\psi_{m_R})(\psi_{n_1}\cdots\psi_{n_S}) \\ &= \sum \beta_{1n_1}\cdots\beta_{Sn_S}\alpha_{1m_1}\cdots\alpha_{Rm_R}(-1)^{RS}(\psi_{n_1}\cdots\psi_{n_S})(\psi_{m_1}\cdots\psi_{m_R}) \\ &= (-1)^{RS}(\eta_1\eta_2\cdots\eta_S)(\xi_1\xi_2\cdots\xi_R)\end{aligned} \tag{4-40}$$

が成立する．特に $R = S = 1$ の場合を考えると

$$\xi\eta = -\eta\xi \tag{4-41}$$

を得るから Grassmann 数は反可換である．Grassmann 数が反可換数と呼ばれ，a 数と略記される理由はここにある[1)]．以後，この略記法を採用しよう．

式(4-40)によれば2個の a 数の積 $\xi_1\xi_2$ は任意の単項式と可換であり，従って任意の e 数と可換であるが，$\xi_1\xi_2 = 0$ でない限り $\xi_1\xi_2$ は c 数ではない．実際，

$$\begin{aligned}(\xi_1\xi_2)^2 &\equiv (\xi_1\xi_2)(\xi_1\xi_2) \\ &= \xi_1(\xi_2\xi_1)\xi_2 = -\xi_1(\xi_1\xi_2)\xi_2 = -(\xi_1\xi_1)(\xi_2\xi_2) = -0\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

だから $\xi_1\xi_2$ が c 数ならば $\xi_1\xi_2 = 0$ である．一般に偶数個の a 数の積は任意の e 数と

1)　「a 数」が "anticommuting number" の略称であることはいうまでもない．

可換ではあるが，それが零でない限り c 数ではない．また，任意の a 数の積 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_R$ において m 番目と n 番目の因子を入れ換えれば符号が変わる．実際，例えば $m<n$ の場合，m 番目から n 番目までの積 $\xi_m\xi_{m+1}\cdots\xi_{n-1}\xi_n$ の最初と最後の因子を交換すれば，式 (4-40) によって

$$\begin{aligned}\xi_m\xi_{m+1}\cdots\xi_{n-1}\xi_n &= (-1)^{n-m}\xi_n\xi_m\xi_{m+1}\cdots\xi_{n-1}\\ &= (-1)^{n-m}(-1)^{n-m-1}\xi_n\xi_{m+1}\cdots\xi_{n-1}\xi_m\\ &= -\xi_n\xi_{m+1}\cdots\xi_{n-1}\xi_m\end{aligned}$$

を得る．つまり，任意の a 数の積 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_R$ は添字 $(1,2,\cdots,R)$ に関して完全反対称であり，$(1,2,\cdots,R)$ に関する任意の置換 σ に対して

$$\xi_{\sigma(1)}\xi_{\sigma(2)}\cdots\xi_{\sigma(R)} = \varepsilon(\sigma)\xi_1\xi_2\cdots\xi_R \tag{4-42}$$

が成立する．ところで $\{\xi_r\}_{r=1\sim R}$ の各々は基底 $\{\psi\}_{n=1\sim N}$ によって展開され，積 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_R$ は $\{\psi_{m_1}\cdots\psi_{m_R}\}$ の線形結合として表現できるが，$\{\psi_{m_1}\cdots\psi_{m_R}\}$ の各々は Λ^R に属するから $\xi_1\xi_2\cdots\xi_R$ もまた Λ^R に属する．また，$\{\xi_r\}_{r=1\sim R}$ が全て互いに異なる場合でも，それらが線形従属ならば $\xi_1\xi_2\cdots\xi_R=0$ である点に注意しよう．実際，その場合には $\{\xi_r\}_{r=1\sim R}$ の各々は R' 個 $(R'<R)$ の a 数 $\{\xi'_r\}_{r=1\sim R'}$ の線形結合で表され，$\xi_1\xi_2\cdots\xi_R$ は $\{\xi'_r\}_{r=1\sim R'}$ に関する R 次の単項式 $\{\xi'_{r_1}\xi'_{r_2}\cdots\xi'_{r_R}\}_{r_1,\cdots,r_R=1\sim R'}$ の線形結合として表現されるが，$R'<R$ だから $\{\xi'_{r_1}\xi'_{r_2}\cdots\xi'_{r_R}\}$ は全て重複した因子を含むため零であり，従って $\xi_1\xi_2\cdots\xi_R$ もまた零となる．

さて，数ベクトル空間 K_N として実数ベクトル空間 R_N や複素数ベクトル空間 C_N を選んだとき，$\mathfrak{G}(R_N^*)$ あるいは $\mathfrak{G}(C_N^*)$ の部分空間としての双対空間 R_N^*，C_N^* の元をそれぞれ実 Grassmann 数 (実 a 数)，複素 Grassmann 数 (複素 a 数) と呼ぶ[1)]．すると，任意の複素数 $z\in C$ が二つの実数 $x,y\in R$ を使って $z=x+iy$ と一意的に表現できるのと同様に，任意の複素 a 数 $\zeta\in C_N^*$ は二つの実 a 数 $\xi,\eta\in R_N^*$ を用いて $\zeta=\xi+i\eta$ と一意的に表現できる．これを示そう．

まず．二つの実数ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in R_N$ の順序対 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の集合 S

$$S\equiv\{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in R_N\} \tag{4-43}$$

を考える．式 (4-25) でも示したように，集合 S は

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1)+(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_2)\equiv(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) \tag{4-44}$$

---

1) 同様にして有理数ベクトル空間から出発して得られる有理 Grassmann 数や Galois 体に基礎を置く Galois Grassmann 数なども考えられるが，今のところ実用上の意味はない．

$$\alpha(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv (\alpha\boldsymbol{u},\alpha\boldsymbol{v}) \quad \alpha \in R \tag{4-45}$$

として定義される和とスカラ倍 (実数倍) に関してベクトル空間であり，このベクトル空間を直積空間と呼んで $R_N \times R_N$ と記すのであった．ところで，式 (4-45) は $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の実数倍を定義しているが，二つの実数 $\alpha,\beta \in R$ によって $\gamma = \alpha + i\beta$ と表現される複素数 $\gamma \in C$ に対し，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の γ 倍を

$$\gamma(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\alpha + i\beta)(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \equiv (\alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v}, \beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}) \in S \tag{4-46}$$

と定義してみよう．容易に示されるように式 (4-44) で定義される和と式 (4-46) で定義されるスカラ倍 (複素数倍) に関して集合 S はベクトル空間となる．このベクトル空間を $C(R_N^2)$ と記そう．集合としては $C(R_N^2)$ と $R_N \times R_N$ は同一だが，スカラ倍の定義が異なるためベクトル空間としては全く別物である．例えば $R_N \times R_N$ が実数上の $2N$ 次元ベクトル空間であるのに対し，$C(R_N^2)$ は複素数上の N 次元ベクトル空間である．実際，$\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ を R_N の基底とすれば，集合 S に属する $2N$ 個の元 $\{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{0})\}_{n=1\sim N}, \{(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_n)\}_{n=1\sim N}$ が $R_N \times R_N$ の基底を成すのに対し，$i(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{0},\boldsymbol{v}_n)$ が成立することから $C(R_N^2)$ の基底を構成するには N 個の元 $\{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{0})\}_{n=1\sim N}$ だけで十分である．ところで，$C(R_N^2)$ の元 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ に複素数ベクトル空間 C_N の元 $\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$ を対応させ

$$\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v} \equiv (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{4-47}$$

と表現できることから明らかなように，$C(R_N^2)$ と C_N とは同型 (ベクトル空間として同一) である．また，この表現によれば式 (4-46) は単なる複素数の計算

$$(\alpha + i\beta)(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) \equiv (\alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v}) + i(\beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v})$$

として解釈できる．

今度は R_N の双対空間 R_N^*，すなわち実 a 数から成るベクトル空間を対象とし，$\xi,\eta \in R_N^*$ の順序対 (ξ,η) の集合 S^*

$$S^* \equiv \{(\xi,\eta) | \xi,\eta \in R_N^*\} \tag{4-48}$$

を考える．S の場合と同様に，S^* に和とスカラ倍 (実数倍) を

$$(\xi_1,\eta_1) + (\xi_2,\eta_2) \equiv (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) \tag{4-49}$$

$$\alpha(\xi,\eta) \equiv (\alpha\xi,\alpha\eta) \quad \alpha \in R \tag{4-50}$$

で定義すれば直積空間 $R_N^* \times R_N^*$ を得るが，式 (4-50) の代りに複素数倍を

$$\gamma(\xi,\eta) = (\alpha + i\beta)(\xi,\eta) \equiv (\alpha\xi - \beta\eta, \beta\xi + \alpha\eta) \in S^* \tag{4-51}$$

で定義すれば複素数上で定義された N 次元のベクトル空間 $C(R_N^{*2})$ を得る．また，$(\xi,\eta)\in C(R_N^{*2})$ を形式的に

$$\xi+i\eta\equiv(\xi,\eta) \tag{4-52}$$

と表現すれば，式(4−51)は単なる複素数の計算として解釈される．実は，以下に示すように $C(R_N^{*2})$ は複素 a 数の成すベクトル空間 C_N^* と同型であり，両者を同一視することが可能である．こうして，任意の複素 a 数 $\zeta\in C_N^*$ が二つの実 a 数 $\xi,\eta\in R_N^*$ によって一意的に $\zeta=\xi+i\eta$ と表現されることになる．

では，$C(R_N^{*2})$ と C_N^* が同型であること，つまり $C(R_N^{*2})$ から C_N^* への可逆な線形写像が存在することを示そう[1]．まず，R_N から R への線形写像 $\xi\in R_N^*$ を使って C_N から C への線形写像 $\bar{\xi}\in C_N^*$ を定義する．つまり複素数ベクトル $\boldsymbol{w}\in C_N$ を二つの実数ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in R_N$ を用いて $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}$ と表現したとき，$\bar{\xi}$ を

$$\bar{\xi}(\boldsymbol{w})=\bar{\xi}(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v})\equiv\xi(\boldsymbol{u})+i\xi(\boldsymbol{v}) \tag{4-53}$$

として定義するのである．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ なら，つまり $\boldsymbol{w}$ が実ベクトル $\boldsymbol{u}$ ならば $\bar{\xi}(\boldsymbol{u})$ は $\xi(\boldsymbol{u})$ に一致するから「$\bar{\xi}$ とは R_N から R への線形写像 ξ を C_N から C への線形写像へと線形に拡張したもの」である．そして，$C(R_N^{*2})$ から C_N^* への写像 φ を

$$\varphi(\xi+i\eta)=\bar{\xi}+i\bar{\eta} \tag{4-54}$$

として定義すれば φ は可逆な線形写像であり[2]，φ によって結ばれる $C(R_N^{*2})$ と C_N^* とは同型であってベクトル空間としては区別できない．

さて，R_N の基底を一組選んで $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ とすれば $\{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{0})\}_{n=1\sim N}$ が $C(R_N^2)$ の基底を成すことは前述の通りである．従って，$\{\boldsymbol{v}_n+i\boldsymbol{0}\}_{n=1\sim N}=\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ は $C(R_N^2)$ と同型なベクトル空間 C_N の基底を成す．また，R_N に関する $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ の双対基底を $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ とするとき，各 $\psi_n\in R_N^*$ の定義域 R_N を C_N まで拡張して $\bar{\psi}_n\in C_N^*$ を作れば $\{\bar{\psi}_n\}_{n=1\sim N}$ は C_N の基底 $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ の双対基底になっている．実際 $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ が実ベクトルであり，$\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ が R_N に関する $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n=1\sim N}$ の双対基底であることから

$$\bar{\psi}_m(\boldsymbol{v})=\psi_m(\boldsymbol{v}_n)=\delta_{mn}\quad(m,n=1\sim N)$$

が成立する．以後，$\xi\in R_N^*$ と $\bar{\xi}\in C_N^*$ とを区別せず，ともに ξ と記すことにしよう．

最後に複素 a 数の複素共役について解説しておく．通常の複素数の共役と同様に，

---

1) 本節冒頭の脚注に述べたように，可逆な線形写像で結ばれる二つのベクトル空間は同型であってベクトル空間としては区別できない．

2) 章末の演習問題2参照

二つの実 a 数 $\xi, \eta \in R_N^*$ を使って $\zeta = \xi + i\eta$ と表現される複素 a 数の複素共役は $\zeta^* = \xi - i\eta$ と定義される．$\zeta, \zeta^* \in C_N^*$ だから ζ, ζ^* は共に反可換であり，従って

$$\zeta\zeta = \zeta^*\zeta^* = 0, \quad \zeta\zeta^* = -\zeta^*\zeta \tag{4-55}$$

が成立する．特に $\zeta^*\zeta$ を ξ, η で表現すれば

$$\begin{aligned}\zeta^*\zeta &= (\xi - i\eta)(\xi + i\eta) = \xi\xi - i\eta\xi + i\xi\eta + \eta\eta \\ &= i(\xi\eta - \eta\xi) = i[\xi, \eta] = 2i\xi\eta\end{aligned} \tag{4-56}$$

を得る．通常の複素数 γ の場合には $\gamma^*\gamma$ は実数であり，従って $(\gamma^*\gamma)^* = \gamma^*\gamma$ が成立するが，$\zeta^*\zeta$ は実 a 数ではないため，その複素共役は直接には定義できない．しかし，通常の複素数に対応して

$$(\zeta^*\zeta)^* = \zeta^*\zeta \tag{4-57}$$

が成立することを要求することによって間接的に定義することは可能である．式(4−56)によれば，式(4−57)は $(2i\xi\eta)^* = 2i\xi\eta$，すなわち $-2i(\xi\eta)^* = 2i\xi\eta$ を意味し，

$$(\xi\eta)^* = -\xi\eta = \eta\xi \tag{4-58}$$

が結論される．ただし複素共役演算が $\mathfrak{G}(C_N^*)$ 上でも反線形であること，つまり

$$(\mathsf{a} + i\mathsf{b})^* = \mathsf{a}^* - i\mathsf{b}^* \quad (\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathfrak{G}(C_N^*)) \tag{4-59}$$

を仮定した．式(4−58)に示されるように，2個の実 a 数の積は「純虚数的」であり，複素共役演算によって符号を変える点に注意しよう．また

$$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$$

と表現される複素 a 数の積の複素共役 $(\zeta_1\zeta_2)^*$ は式(4−58)と式(4−59)により

$$\begin{aligned}(\zeta_1\zeta_2)^* &= (\xi_1\xi_2)^* - (\eta_1\eta_2)^* - i\{(\xi_1\eta_2)^* + (\eta_1\xi_2)^*\} \\ &= \xi_2\xi_1 - \eta_2\eta_1 - i(\eta_2\xi_1 + \xi_2\eta_1) = (\xi_2 - i\eta_2)(\xi_1 - i\eta_1) = \zeta_2^*\zeta_1^*\end{aligned}$$

すなわち

$$(\zeta_1\zeta_2)^* = \zeta_2^*\zeta_1^* \tag{4-60}$$

と変形できる．式(4−60)が a 数に限らず任意の e 数に関しても成立すると仮定すれば，つまり

$$(\mathsf{ab})^* = \mathsf{b}^*\mathsf{a}^* \quad (\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathfrak{G}(C_N^*)) \tag{4-61}$$

を仮定すれば，任意個数の複素 a 数の積に関して次式が成立することになる.

$$(\zeta_1\zeta_2\cdots\zeta_M)^* = \zeta_M^*\cdots\zeta_2^*\zeta_1^* \tag{4-62}$$

4 − 3 Grassmann 数による微積分

再び一般の体 K の上の a 数に議論を戻し，K_N^* の元として線形独立な M 個の a 数の組 $(\xi_1,\cdots,\xi_M)$ に一つの e 数 $\mathsf{f}\in\mathfrak{G}(K_N^*)$ を対応付ける関数 $\mathsf{f}=f(\xi_1,\cdots,\xi_M)$ を考えよう．当然ながら $M\le N$ である．重要なのは関数 f が $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ のべき級数に展開できる場合であり，その場合には f は高々 M 次の多項式となって

$$\begin{aligned}
&f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)\\
&\quad= f_0+\sum_{1\le m_1\le M} f_{m_1}\xi_{m_1}+\sum_{1\le m_1<m_2\le M} f_{m_1,m_2}\xi_{m_1}\xi_{m_2}+\cdots\\
&\quad\cdots+\sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_M\le M} f_{m_1,m_2,\cdots,m_M}\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_M}
\end{aligned} \tag{4-63}$$

と表現できる．$M+1$ 次以上の高次の項は重複した因子を含み，式 $(4-42)$ によって零となるからである．係数 $f_0, f_{m_1}, f_{m_1,m_2},\cdots, f_{m_1,m_2,\cdots,m_M}$ が $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ を含まない e 数であることは言うまでもない．例えば $M=1,2,3$ の場合には次のように書ける.

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= f_0+f_1\xi\\
f(\xi,\eta) &= f_0+f_1\xi+f_2\eta+f_{12}\xi\eta\\
f(\xi,\eta,\zeta) &= f_0+f_1\xi+f_2\eta+f_3\zeta+f_{12}\xi\eta+f_{13}\xi\zeta+f_{23}\eta\zeta+f_{123}\xi\eta\zeta
\end{aligned} \tag{4-64}$$

次に，a 数 $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ による関数 $f(\xi_1,\cdots,\xi_M)$ の微分について考えよう．$\mathfrak{G}(K_N^*)$ には除算が定義されておらず，無限小量の比としての微分は意味を持たないが，線形性や Leibniz 則などの基本的性質を持つように形式的な微分を定義するのである．幸いにも式 $(4-63)$ に示されるように $f(\xi_1,\cdots,\xi_M)$ は $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ に関する単項式 $\{\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}\}$ の線形結合で表現されるので，単項式の微分が定義できれば線形性を用いて任意の関数が微分できる．実は

$$\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})=0 \quad (\xi_m \text{ を含まない場合}) \tag{4-65a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_m\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})=\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R} \tag{4-65b}$$

を要求すれば微分演算は確定する．$\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ は ξ_m を全く含まないか 1 回だけ含むかの何れかであるが，含まない場合は式 (4 - 65a) を適用し，含む場合には ξ_m を一番左に移動した上で式 (4 - 65b) を適用すれば良いからである．例えば ξ_m が $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ の中の左から k 番目に位置する場合には

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{k-1}}\xi_m\xi_{m_{k+1}}\cdots\xi_{m_R})\\&\qquad=(-1)^{k-1}\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_m\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{k-1}}\xi_{m_{k+1}}\cdots\xi_{m_R})\\&\qquad=(-1)^{k-1}\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{k-1}}\xi_{m_{k+1}}\cdots\xi_{m_R}\end{aligned}\tag{4-66}$$

となる．また，「$\partial/\partial\xi_m$ を全ての a 数と反可換な演算子」と考えると Leibniz 則が成立し，例えば $A\equiv\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{k-1}}$，$B\equiv\xi_m\xi_{m_{k+1}}\cdots\xi_{m_R}$ としたとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi_m}AB&=\left(\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)_A AB+\left(\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)_B AB\\&=\frac{\partial A}{\partial\xi_m}B+(-1)^{k-1}A\left(\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)_B B\\&=(-1)^{k-1}A\frac{\partial B}{\partial\xi_m}=(-1)^{k-1}\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{k-1}}\xi_{m_{k+1}}\cdots\xi_{m_R}\end{aligned}$$

となって式 (4 - 66) が再現される．ただし $(\partial/\partial\xi_m)_A$ と $(\partial/\partial\xi_m)_B$ はそれぞれ A のみ，B のみに作用する微分演算子である．

式 (4 - 65b) では微分演算で消去される変数が左端に置かれていることから，この微分演算子は左微分と呼ばれる．一方，右端に置かれた変数を消去することで右微分を定義しても良い．つまり

$$(\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{R-1}}\xi_m)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_m}=\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_{R-1}}\tag{4-67}$$

である．偏微分記号の上の矢印は演算子 $\overleftarrow{\partial}/\partial\xi_m$ が左側に向かって作用することを意味する．左微分と右微分の結果は一般には異なる点に注意しよう．本書では特に断らない限り左微分を使う．

さて，c 数を成分とする可逆な M 次正方行列 T を使って線形独立な a 数 $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ を線形変換すれば，再び線形独立な a 数 $\{\eta_m\}_{m=1\sim M}$ を得る．

$$\begin{aligned}\eta_k&=\sum_{m=1}^{M}[T]_{km}\xi_m\quad(k=1\sim M)\\\xi_m&=\sum_{k=1}^{M}[T^{-1}]_{mk}\eta_k\quad(m=1\sim M)\end{aligned}\tag{4-68}$$

ところで，式 (4－65) で微分演算を定義する際に前提としているのは $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ の線形独立性だけだから，$\{\eta_m\}_{m=1\sim M}$ に関する単項式 $\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}$ を η_m で微分した場合でも

$$\frac{\partial}{\partial\eta_k}\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}=0\quad(\eta_k \text{ を含まない場合}) \tag{4-69a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta_k}\eta_k\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}=\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R} \tag{4-69b}$$

が成立しなければならない．実は，chain rule

$$\frac{\partial}{\partial\eta_k}=\sum_{m=1}^{M}\frac{\partial\xi_m}{\partial\eta_k}\frac{\partial}{\partial\xi_m}=\sum_{m=1}^{M}[T^{-1}]_{mk}\frac{\partial}{\partial\xi_m} \tag{4-70}$$

が成立すると仮定すれば，式 (4－69) は式 (4－65) から導出される．これを示そう．まず，式 (4－68) によって $\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}$ は

$$\begin{aligned}\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}&=\sum_{m_1,\cdots,m_R=1}^{M}[T]_{k_1m_1}\cdots[T]_{k_Rm_R}\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_R}\\&=S_{m,0}+\sum_{l=1}^{M}S_{m,l}\\S_{m,0}&\equiv\sum_{m_1,\cdots,m_R\neq m}[T]_{k_1m_1}\cdots[T]_{k_Rm_R}\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_R}\\S_{m,l}&\equiv\sum_{m_l=m}[T]_{k_1m_1}\cdots[T]_{k_Rm_R}\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_R}\end{aligned} \tag{4-71}$$

と表現できる．ここで m は任意の整数であり，和記号の下の "$m_1,\cdots,m_R\neq m$" は「どの $m_1,\cdots,m_R$ も m とは一致しない項に関する和」を，"$m_l=m$" は「m_l だけが m と一致する項に関する和」を意味する．この他 $m_1,\cdots,m_R$ の中の複数が m と一致する項もあるが，その場合には $\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_R}$ が零となる．そして $\xi_{m_1}\cdots\xi_{m_R}$ から ξ_{m_l} を除いて得られる $R-1$ 次の単項式を M_{m_l} で表わせば，式 (4－65) により

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi_m}S_{m,0}=0\\&\frac{\partial}{\partial\xi_m}S_{m,l}\equiv(-1)^{l-1}\sum_{m_l=m}[T]_{k_1m_1}\cdots[T]_{k_lm}\cdots[T]_{k_Rm_R}M_{m_l}\end{aligned} \tag{4-72}$$

が成立するから，

$$\frac{\partial}{\partial\eta_k}\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}=\sum_{m=1}^{M}[T^{-1}]_{mk}\frac{\partial}{\partial\xi_m}(S_{m,0}+\sum_{l=1}^{M}S_{m,l})$$

$$= \sum_{l=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} [T^{-1}]_{mk} \frac{\partial}{\partial \xi_m} S_{m,l}$$

と書けるが，式(4－72)によれば

$$\sum_{m=1}^{M} [T^{-1}]_{mk} \frac{\partial}{\partial \xi_m} S_{m,l}$$
$$= (-1)^{l-1} \sum_{m_l = m} [T]_{k_1 m_1} \cdots \left(\sum_{m=1}^{M} [T]_{k_l m} [T^{-1}]_{mk} \right) \cdots [T]_{k_R m_R} M_{m_l}$$
$$= (-1)^{l-1} \sum_{m_l = m} [T]_{k_1 m_1} \cdots \delta_{k_l k} \cdots [T]_{k_R m_R} M_{m_l}$$

が成立するので

$$\frac{\partial}{\partial \eta_k} \eta_{k_1} \eta_{k_2} \cdots \eta_{k_R}$$
$$= \sum_{l=1}^{M} (-1)^{l-1} \sum_{m_l = m} [T]_{k_1 m_1} \cdots \delta_{k_l k} \cdots [T]_{k_R m_R} M_{m_l} \tag{4-73}$$

が結論される．ここで $\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_R}$ が η_k を含まない場合には常に $\delta_{k_l k} = 0$ だから式(4－69a)が成立する．また，$k_1 = k$ ならば $l = 2 \sim M$ に対して $\delta_{k_l k} = 0$ だから式(4－73)は

$$\frac{\partial}{\partial \eta_k} \eta_k \eta_{k_2} \cdots \eta_{k_R}$$
$$= \sum_{m_1 = m} [T]_{k_2 m_2} \cdots [T]_{k_R m_R} \xi_{m_2} \xi_{m_3} \cdots \xi_{m_R} = \eta_{k_2} \cdots \eta_{k_R}$$

となるが，これは式(4－69b)に他ならない．

次に，a 数による定積分を定義しよう．まずは簡単のため1変数 ξ の場合を考える．定積分に要求するのは線形性と部分積分可能性である．つまり，$f(\xi)$，$g(\xi)$ を ξ の関数とし，a，b を ξ に依存しない e 数とするとき

$$\int d\xi \{ \mathrm{a} f(\xi) + \mathrm{b} g(\xi) \} = \mathrm{a}_d \int d\xi f(\xi) + \mathrm{b}_d \int d\xi g(\xi) \quad (\text{線形性}^{1)}) \tag{4-74a}$$

$$\int d\xi \{ \frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi) \} = 0 \quad (\text{部分積分可能性}) \tag{4-74b}$$

1) 積分記号の前の係数が a，b ではなく a_d，b_d となっていることから分かるように，これは単純な線形性ではなく，正確には「G-線形性」と呼ぶべきである．4-5節を参照のこと．

を仮定する．ただし，e 数 $\mathsf{a}\in\mathfrak{G}(K_N^*)$ が式 (4-38) のように展開されるとき，a_d は

$$
\begin{aligned}
\mathsf{a}_d \equiv (-1)^0 a_0 &+ \sum_{1\le n_1\le N}(-1)^1 a_{n_1}\psi_{n_1} \\
&+ \sum_{1\le n_1<n_2\le N}(-1)^2 a_{n_1,n_2}\psi_{n_1}\psi_{n_2} + \\
&\cdots + \sum_{1\le n_1<\cdots<n_N\le N}(-1)^N a_{n_1,\cdots,n_N}\psi_{n_1}\cdots\psi_{n_N}
\end{aligned}
\tag{4-75}
$$

として定義され，

$$
(\mathsf{a}_d)_d = \mathsf{a}, \quad \eta\mathsf{a} = \mathsf{a}_d\eta \quad (\eta\in K_N^*) \tag{4-76}
$$

が成立する．式 (4-74a) で a，b が積分記号の前に出る際に a_d，b_d に変ったのは $d\xi$ が a 数だからである[1]．また，式 (4-74b) は境界値が零であるような関数の導関数を定積分した場合に対応している．1 変数関数 $f(\xi)$ は式 (4-64) に示すように書けるから，その積分は式 (4-74a) によって

$$
\int d\xi f(\xi) = \int d\xi(f_0 + f_1\xi) = (f_0)_d\int d\xi 1 + (f_1)_d\int d\xi\xi
$$

と表現できる．従って，定数 1 および ξ の積分が決まれば任意の関数の積分が定義されることになる．ところで，式 (4-74b) によれば

$$
\int d\xi\{\frac{\partial}{\partial\xi}f(\xi)\} = \int d\xi\{\frac{\partial}{\partial\xi}(f_0 + f_1\xi)\} = \int d\xi(f_1)_d = f_1\int d\xi 1 = 0
$$

が成立しなければならず，定数 1 の積分が零であることが結論される．残るは ξ の積分であるが，ξ のみに依存する関数の ξ による定積分はいかなる変数にも依存しない定数になるはずだから，最も簡単に 1 として定義する．すなわち，

$$
\int d\xi 1 = 0, \quad \int d\xi\xi = 1 \tag{4-77}
$$

である．線形独立な a 数の積 $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ を ξ_m で積分すると

$$
\begin{aligned}
&\int d\xi_m\,\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R} \\
&\quad = (\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})_d\int d\xi_m 1 = 0 \quad (\xi_m \text{ を含まない場合})
\end{aligned}
\tag{4-78a}
$$

$$
\begin{aligned}
\int d\xi_m\,\xi_m\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R} &= \left(\int d\xi_m\,\xi_m\right)\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R} \\
&= 1\cdot\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R} = \xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}
\end{aligned}
\tag{4-78b}
$$

1)　ここで “d” は微分形式の理論に登場する外微分作用素ではなく，単なる無限少量を意味する．

が成立するから，式(4-65)と比較すれば分かるように「ξ による定積分は ξ による偏微分と同じである」ことが結論される．また，

$$(d\xi)(\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}) = (-1)^{R-1}(\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})(d\xi) = (\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})_d(d\xi)$$

であることに注意すれば，式(4-78b)は次のようにしても計算できる．

$$\int d\xi_m\xi_m\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R} = \int d\xi_m(-1)^{R-1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}\xi_m$$
$$= (-1)^{R-1}(\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})_d\int d\xi_m\xi_m = \xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$$

どちらの計算法でも同じ結果が得られるのは，線形性の定義式(4-74a)の右辺に a, b でなく a_d, b_d を使ったからである，という点に注意しておこう．

さて，M 変数 $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ の関数 f は式(4-63)のように展開できるが，積分と微分が同じ作用を持つことから，$\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ による f の M 重積分は

$$\int d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_M f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M) = (-1)^{M(M-1)/2}(f_{1,2,\cdots,M})_{d^M} \qquad (4-79)$$

となる．積分変数 $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ を可逆な M 次正方行列 T を使って式(4-68)に示すように $\{\eta_m\}_{m=1\sim M}$ へと変数変換したとき，この変換に対する Jacobian を J とすれば

$$F(\eta_1,\cdots,\eta_M) \equiv f(\xi_1,\cdots,\xi_M)$$
$$= f\left(\sum_{k_1=1}^{M}[T^{-1}]_{1k_1}\eta_{k_1},\cdots,\sum_{k_M=1}^{M}[T^{-1}]_{Mk_M}\eta_{k_M}\right) \qquad (4-80)$$

に対して

$$\int d\xi_1 d\xi_2\cdots d\xi_M f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)$$
$$= J\int d\eta_1 d\eta_2\cdots d\eta_M F(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_M) \qquad (4-81)$$

が成立するはずである．ただし，c 数の行列 T による線形変換では Jacobian は c 数の定数となり，積分の前に出せることを仮定した．ところで，F を式(4-63)のように展開したとき，$\{\eta_m\}_{m=1\sim M}$ に関する M 次の項は

$$F_{1,\cdots,M}\eta_1\cdots\eta_M = f_{1,\cdots,M}\xi_1\cdots\xi_M$$
$$= f_{1,\cdots,M}\sum_{k_1,\cdots,k_M=1}^{M}[T^{-1}]_{1k_1}\cdots[T^{-1}]_{Mk_M}\eta_{k_1}\cdots\eta_{k_M} \qquad (4-82)$$

と書けるが，$\eta_{k_1}\eta_{k_2}\cdots\eta_{k_M}$ の完全反対称性のため $(k_1,k_2,\cdots,k_M)$ が $(1,2,\cdots,M)$ の置換である場合だけが和に寄与する．それゆえ，式(4-42)を利用すれば

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k_1,\cdots,k_M=1}^{M} [T^{-1}]_{1k_1}\cdots[T^{-1}]_{Mk_M}\eta_{k_1}\cdots\eta_{k_M} \\
&\quad= \sum_{\sigma}[T^{-1}]_{1\sigma(1)}\cdots[T^{-1}]_{M\sigma(M)}\eta_{\sigma(1)}\cdots\eta_{\sigma(M)} \\
&\quad= \left\{\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)[T^{-1}]_{1\sigma(1)}\cdots[T^{-1}]_{M\sigma(M)}\right\}\eta_1\cdots\eta_M \\
&\quad= \det(T^{-1})\eta_1\cdots\eta_M
\end{aligned}
$$

と変形でき，これを式(4-82)に代入して $\eta_1\cdots\eta_M$ の係数を比較することにより

$$
F_{1,\cdots,M} = \det(T^{-1})f_{1,\cdots,M} \tag{4-83}
$$

を得る．こうして式(4-81)から $f_{1,\cdots,M} = J\det(T^{-1})f_{1,\cdots,M}$，すなわち

$$
J = \det(T) \tag{4-84}
$$

が結論される．一方，c数の積分変数変換では Jacobian は $J = \det(T^{-1})$ となる点に注意しよう．この一見不可解な性質も「Grassmann 数では積分が微分と等価である」ことを考えれば納得がいく．つまり，微分演算子に関しては chain rule

$$
\frac{\partial}{\partial\xi_m} = \sum_{k=1}^{M}\frac{\partial\eta_k}{\partial\xi_m}\frac{\partial}{\partial\eta_k} = \sum_{k=1}^{M}[T]_{km}\frac{\partial}{\partial\eta_k}
$$

によって

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\xi_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_M} &= \sum_{k_1,\cdots,k_M=1}^{M}[T]_{k_1 1}\cdots[T]_{k_M M}\frac{\partial}{\partial\eta_{k_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\eta_{k_M}} \\
&= \det(T)\frac{\partial}{\partial\eta_1}\cdots\frac{\partial}{\partial\eta_M}
\end{aligned} \tag{4-85}
$$

が導出されるからである．

最後に e 数の指数関数を定義し，微積分に関する代表的な性質を示そう．c 数の指数関数に倣い，e 数の指数関数もべき級数

$$
\exp(\mathsf{a}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathsf{a}^n \tag{4-86}
$$

によって定義する．a 数 ξ に対してはべきは1次までで終了し

$$
\exp(\xi) = 1+\xi, \quad \frac{d}{d\xi}\exp(\xi) = 1 \tag{4-87}
$$

となる．任意次数のa数の単項式 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_M$ の場合もべきは1次までで終了し

$$\exp(\xi_1\xi_2\cdots\xi_M) = 1 + \xi_1\xi_2\cdots\xi_M \tag{4-88}$$

であるが，常に1次までのべきで終了する訳ではない．例えば，c数を要素とする M 次正方行列 A による a数の双1次形式

$$\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta} = \sum_{m,n=1}^{M} \xi_m[A]_{mn}\eta_n \tag{4-89}$$

を考えよう．変数変換に関する議論とは異なり，ここでは $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ と $\{\eta_m\}_{m=1\sim M}$ は独立な a 数を表す．また，$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}$ はそれぞれ $\{\xi_m\}$，$\{\eta_m\}$ を並べて作った M 次元のベクトルである．この $\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta}$ の指数関数は M 次までのべきを含み

$$\exp(\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta}) = 1 + \boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta})^2 + \cdots + \frac{1}{M!}(\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta})^M \tag{4-90}$$

と書ける．なぜなら M 次のべきで初めて $2M$ 個の因子 $\{\xi_m\}$，$\{\eta_m\}$ の全てを含んだ単項式が現れるからである．一方，$M+1$ 次以上のべきは必ず重複した因子を含むので零となる．また，e数は可換とは限らないので一般には

$$\exp(\mathsf{a}+\mathsf{b}) \neq \exp(\mathsf{a})\exp(\mathsf{b}) \tag{4-91}$$

だが，a数の偶数次の単項式は全てのe数と可換なので，例えば

$$\exp(\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta} + \mathsf{a}) = \exp(\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta})\exp(\mathsf{a}) = \exp(\mathsf{a})\exp(\boldsymbol{\xi}\cdot A\boldsymbol{\eta}) \tag{4-92}$$

は常に成立する．

ところで，a数 ξ の関数

$$\delta(\xi) \equiv \xi \tag{4-93}$$

はデルタ関数のような働きを持つ．実際，ξ_0 をa数とすれば

$$\begin{aligned}\int d\xi\,\delta(\xi-\xi_0)f(\xi) &= \int d\xi(\xi-\xi_0)(f_0+f_1\xi)\\ &= \left(\int d\xi\,\xi\right)f_0 + \xi_0\int d\xi f_1\xi = f_0 + \xi_0(f_1)_d = f_0 + f_1\xi_0 = f(\xi_0)\end{aligned} \tag{4-94}$$

が成立する．また，c数のデルタ関数の表式 $\int dx\exp(ipx) = 2\pi\delta(p)$ に対応して

$$\int d\xi\exp(\xi\eta) = \int d\xi(1+\xi\eta) = \eta = \delta(\eta) \tag{4-95}$$

となる．従って，

$$\int d\eta d\xi \exp(\xi\eta) = \int d\eta \delta(\eta) = 1 \tag{4-96}$$

であり，これを一般化すれば，Gauss の積分公式に対応して

$$\int d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} \exp(\boldsymbol{\xi} \cdot A\boldsymbol{\eta}) = \det(A) \tag{4-97}$$

が成立する．ただし，積分の順序は

$$d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} \equiv d\eta_1 d\xi_1 \cdots d\eta_M d\xi_M = (-1)^{M(M+1)/2} d\xi_1 \cdots d\xi_M d\eta_1 \cdots d\eta_M \tag{4-98}$$

として定義する．実際，$\boldsymbol{\eta}' = A\boldsymbol{\eta}$ と変数変換した後に $\boldsymbol{\eta}'$ を改めて $\boldsymbol{\eta}$ と記せば

$$\begin{aligned}\int d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} \exp(\boldsymbol{\xi} \cdot A\boldsymbol{\eta}) &= \det(A) \int d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} \exp(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}) \\ &= \det(A) \int d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} \exp\left(\sum_{m=1}^{M} \xi_m \eta_m\right) \end{aligned} \tag{4-99}$$

と書けるが[1)]，$\xi_m \eta_m$ は全ての e 数と可換だから式 (4-96) を使って

$$\begin{aligned}&\int d\boldsymbol{\eta} d\boldsymbol{\xi} \exp\left(\sum_{m=1}^{M} \xi_m \eta_m\right) \\ &= \left\{\int d\eta_1 d\xi_1 \exp(\xi_1\eta_1)\right\} \cdots \left\{\int d\eta_M d\xi_M \exp(\xi_M\eta_M)\right\} = 1\end{aligned}$$

が結論され，これを式 (4-99) に代入すれば式 (4-97) を得る．以上の議論は a 数が実であるか複素であるかに関わらずに成立するから，$\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ と $\{\eta_m\}_{m=1\sim M}$ の代わりに

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m, \quad \zeta_m^* = \xi_m - i\eta_m \quad (m = 1 \sim M)$$

と表現される $2M$ 個の複素 a 数 $\{\zeta_m\}_{m=1\sim M}$，$\{\zeta_m^*\}_{m=1\sim M}$ を用いた場合でも有効であり，式 (4-97) は

$$\int d\boldsymbol{\zeta} d\boldsymbol{\zeta}^* \exp(\boldsymbol{\zeta}^* \cdot A\boldsymbol{\zeta}) = \det(A) \tag{4-100}$$

と書ける．

---

1) 変数変換によって式 (4-81)，(4-84) の結果を利用するには一度積分順序を変え，式 (4-98) の最右辺の順序にしておく必要があり符号因子 $(-1)^{M(M+1)/2}$ が必要になるが，計算結果を再び標準の積分順序に変える際に出てくる符号因子と相殺する．

4-4　Grassmann数で記述される古典系

Lagrange形式で考えた場合，自由度 N_F の古典系の配位は N_F 個の一般化座標 $\{q_n\}_{n=1\sim N_F}$ によって指定される．あるいは N_F 次元の配位空間内の点 $q = (q_1,\cdots,q_{N_F})$ として表現される，と言っても良い．通常の系 (Bose系) では $\{q_n\}_{n=1\sim N_F}$ は全て実数であるが，本節では実 a 数 $\{\eta_n\}_{n=1\sim N_F}$ を一般化座標とする古典系を考える．この系の配位は順序付けられた N_F 個の実 a 数の組 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1,\cdots,\eta_{N_F})$ によって指定されるので，配位空間としては N_F 個の R_N^* の直積として得られる空間 $(R_N^*)^{N_F}$ を考えれば良く，系の時間発展は $(R_N^*)^{N_F}$ 内の軌跡 $\boldsymbol{\eta}(t)$ として解釈される．

さて，時間に依存する a 数 $\xi(t)$ の時間微分 $\dot{\xi}(t)$ は実関数の場合と全く同様に

$$\dot{\xi}(t) \equiv \lim_{\delta t\to 0}\frac{\xi(t+\delta t)-\xi(t)}{\delta t} \tag{4-101}$$

として定義される．これはc数 $\pm 1/\delta t$ を係数とする a 数 $\xi(t+\delta t)$，$\xi(t)$ の線形結合だから $\dot{\xi}(t)$ もまた a 数である．積 $\xi(t)\eta(t)$ の微分は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{\xi(t)\eta(t)\} &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\xi(t+\delta t)\eta(t+\delta t)-\xi(t)\eta(t)}{\delta t}\\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\xi(t+\delta t)-\xi(t)}{\delta t}\eta(t+\delta t)+\lim_{\delta t\to 0}\xi(t)\frac{\eta(t+\delta t)-\eta(t)}{\delta t}\\ &= \dot{\xi}(t)\eta(t)+\xi(t)\dot{\eta}(t)\end{aligned} \tag{4-102}$$

として計算され，実関数の場合と同様に Leibniz 則が成立する．また，$\xi(t)\dot{\eta}(t)$ を左辺に移項した後に両辺を $t=a$ から $t=b$ まで積分すれば，部分積分の公式

$$\int_a^b dt\dot{\xi}(t)\eta(t) = \xi(t)\eta(t)|_a^b - \int_a^b dt\xi(t)\dot{\eta}(t) \tag{4-103}$$

を得ることも実関数の場合と同様である．式(4-102)を繰り返し適用すれば

$$\frac{d}{dt}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_M) = \dot{\xi}_1\xi_2\cdots\xi_M+\xi_1\dot{\xi}_2\cdots\xi_M+\cdots+\xi_1\xi_2\cdots\dot{\xi}_M \tag{4-104}$$

が導かれるが (記法を簡単にするため $\xi_m(t)$ 等を単に ξ_m と記す)，これが

$$\frac{d}{dt}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_M) = \sum_{m=1}^{M}\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_M) \tag{4-105}$$

と書ける点に注意しよう．実際，$\dot{\xi}_m\partial/\partial\xi_m$ は全ての e 数と可換だから

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_1\xi_2\cdots\xi_M) &= (\xi_1\cdots\xi_{m-1})\left(\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)(\xi_m\xi_{m+1}\cdots\xi_M)\\ &= \xi_1\cdots\xi_{m-1}\dot{\xi}_m\xi_{m+1}\cdots\xi_M\end{aligned}$$

であり，従って式 (4－105) の右辺は式 (4－104) の右辺に一致する．実は，M 個の a 数 $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ の中から任意の R 個 $\{\xi_{m_r}\}_{r=1\sim R}$ を選んで作った積 $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ に関しても

$$\frac{d}{dt}(\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})=\sum_{m=1}^{M}\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}(\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}) \tag{4-106}$$

が成立する．なぜなら，右辺の和で ξ_m が $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ に含まれるような m に対しては，その ξ_m が $\dot{\xi}_m\partial/\partial\xi_m$ の作用によって $\dot{\xi}_m$ に置き変わり，それ以外の m に対しては $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ は $\dot{\xi}_m\partial/\partial\xi_m$ の作用によって零になるからである．ところで，$\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ の任意の関数 $f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)$ は $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ などの単項式の線形結合として式 (4－63) のように展開できるから，その各項に式 (4－106) を適用すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)&=\sum_{m=1}^{M}\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)\\&=\left(\sum_{m=1}^{M}\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)\end{aligned} \tag{4-107}$$

を得るが，これが $\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ の任意の関数について成立することから

$$\frac{d}{dt}=\sum_{m=1}^{M}\dot{\xi}_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}\qquad(\{\xi_m\}_{m=1\sim M}\text{ の関数に対して}) \tag{4-108}$$

が結論される．また，$\{\xi_m\}_{m=1\sim M}$ の各々が微少量 $\{\delta\xi_m\}_{m=1\sim M}$ だけ変化した場合の関数 f の変化量 δf も同様にして計算できる．つまり，2 次以上の無限少量を無視すれば任意の単項式に関して

$$\begin{aligned}&\delta(\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})\\&\quad=(\xi_{m_1}+\delta\xi_{m_1})(\xi_{m_2}+\delta\xi_{m_2})\cdots(\xi_{m_R}+\delta\xi_{m_R})-\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}\\&\quad=(\delta\xi_{m_1})\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}+\xi_{m_1}(\delta\xi_{m_2})\cdots\xi_{m_R}+\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots(\delta\xi_{m_R})\\&\quad=\sum_{m=1}^{M}\left(\delta\xi_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)(\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R})\end{aligned}$$

が成立することから ($\delta\xi_m\partial/\partial\xi_m$ が任意の e 数と可換である点に注意)

$$\delta f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)=\left(\sum_{m=1}^{M}\delta\xi_m\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right)f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M) \tag{4-109}$$

が結論される．式 (4－109) の両辺を dt で割れば再び式 (4－107) を得る．

K_N^* の基底 $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ を使って e 数 $\mathbf{z}\equiv\psi_1\psi_2\cdots\psi_N$ を定義すれば，任意の a

数 $\xi \in K_N^*$ に対して $\xi \mathsf{z} = 0$ が成立する．なぜなら ξ を $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ で展開すれば $\xi \mathsf{z}$ は $N+1$ 次の単項式 $\psi_n\psi_1\psi_2\cdots\psi_N$ の線形結合で表されるが，これらの単項式は全て零だからである．逆に，任意の a 数との積が零となるような e 数は z の c 数倍に限られ，次の定理が成立する．

【零積定理】

任意の a 数 $\xi \in K_N^*$ に対して $\xi \mathsf{a} = 0$ を満足する e 数 $\mathsf{a} \in \mathfrak{G}(K_n^*)$ は，K_N^* の任意の基底 $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ と，基底の選び方に依存する c 数 a を使って $\mathsf{a} = a\psi_1\psi_2\cdots\psi_N$ と書ける．

これを証明するため，1 と $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ から構成される 2^N 個の e 数

$$1, \quad \{\psi_{n_1}\}_{1\le n_1\le N}, \quad \{\psi_{n_1}\psi_{n_2}\}_{1\le n_1<n_2\le N}, \quad \cdots, \quad \{\psi_1\psi_2\cdots\psi_N\}$$

が $\mathfrak{G}(R_N^*)$ の基底をなすことを利用する．$\mathsf{a} \in \mathfrak{G}(R_N^*)$ をこの基底で

$$\begin{aligned}\mathsf{a} = a_0 + \sum_{1\le n_1\le N} a_{n_1}\psi_{n_1} + \sum_{1\le n_1<n_2\le N} a_{n_1n_2}\psi_{n_1}\psi_{n_2} + \cdots \\ \cdots + a_{12\cdots N}\psi_1\psi_2\cdots\psi_N \end{aligned} \qquad (4-110)$$

と展開したとき，$\psi_n \mathsf{a} = 0$ という条件から ψ_n を含まない項の係数は全て零でなければならない (ψ_n を含まない項は ψ_n を乗じても零とならず，乗じた後の各項は互いに線形独立である点に注意)．これが任意の $n = 1 \sim N$ に対して成立することから，式 (4-110) の展開で非零の係数を持ち得るのは $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ を全て含む項，すなわち最後の項だけであることが結論され，$\mathsf{a} = a_{12\cdots N}\psi_1\psi_2\cdots\psi_N$ を得る．

では，以上の結果に基づいて実 a 数 $\{\eta_n\}_{n=1\sim N_F}$ を一般化座標とする古典系の解析力学を展開してみよう．$\{\eta_n\}_{n=1\sim N_F}$ を要素とするベクトルを $\boldsymbol{\eta}$，その時間微分を $\dot{\boldsymbol{\eta}} = (\dot{\eta}_1, \cdots, \dot{\eta}_{N_F})$ とすれば，Bose 系の場合と同様に Fermi 系の Lagrangian もまた $L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)$ として与えられ，時刻 t_I，t_F における配位 $\boldsymbol{\eta}_I$，$\boldsymbol{\eta}_F$ を規定すれば，その間の代表点の運動 $\boldsymbol{\eta}(t)$ は作用積分

$$A[\boldsymbol{\eta}] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t) \qquad (4-111)$$

に対する停留条件によって決まる．つまり，$\delta\boldsymbol{\eta}(t_F) = \delta\boldsymbol{\eta}(t_I) = \mathbf{0}$ を満足する任意の微小変動 $\delta\boldsymbol{\eta}(t)$ に対して，作用積分の変分 δA

$$\delta A \equiv A[\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}] - A[\boldsymbol{\eta}]$$

$$= \int_{t_I}^{t_F} dt\{L(\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}} + \delta\dot{\boldsymbol{\eta}}, t) - L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)\} \tag{4-112}$$

を零とするような $\boldsymbol{\eta}(t)$ が代表点の運動を表す．ここで，上式右辺の被積分関数の計算に式 (4－109) を利用し，部分積分を施した上で $\delta\boldsymbol{\eta}(t_F) = \delta\boldsymbol{\eta}(t_I) = \mathbf{0}$ を利用すれば

$$\delta A = \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{ \sum_{n=1}^{N_F} \delta\eta_n \frac{\partial L}{\partial \eta_n} + \sum_{n=1}^{N_F} \delta\dot{\eta}_n \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} \right\}$$

$$= \int_{t_I}^{t_F} dt \sum_{n=1}^{N_F} \delta\eta_n \left\{ \frac{\partial L}{\partial \eta_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} \right\} \tag{4-113}$$

を得る．2 章の式 (2－67) と同様に，任意の微小変動 $\delta\boldsymbol{\eta}$ に対して

$$\delta A = \int_{t_I}^{t_F} dt \sum_{n=1}^{N_F} \delta\eta_n \frac{\delta A}{\delta \eta_n} \tag{4-114}$$

が成立すべしという条件によって汎関数微分 $\{\delta A/\delta\eta_n\}_{n=1\sim N_F}$ を定義すれば[1]，

$$\frac{\delta A}{\delta \eta_n} = \frac{\partial L}{\partial \eta_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} \quad (n = 1 \sim N_F) \tag{4-115}$$

と書ける．そして，Bose 系の場合と同様に任意の $\delta\boldsymbol{\eta}$ に対して $\delta A = 0$ が成立するという条件から Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_n} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} = 0 \quad (n = 1 \sim N_F) \tag{4-116}$$

が導かれる．これを示そう．まず，$L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)$ がどのような e 数であっても R_N^* の基底 $\{\psi_N\}_{n=1\sim N}$ に関する高々 N 次の多項式だから，これを η_n や $\dot{\eta}_n$ で微分して得られる $\delta A/\delta\eta_n$ は $\{\psi_n\}_{n=1\sim N}$ に関する高々 $N-1$ 次の多項式である．一方，任意の $\delta\boldsymbol{\eta}$ に対して $\delta A = 0$ が成立するためには，任意の $\delta\eta_n$ に対して $\delta\eta_n(\delta A/\delta\eta_n) = 0$ が成立しなければならない．これは任意の a 数 ξ に対して $\xi(\delta A/\delta\eta_n) = 0$ となることを意味し[2]，零積定理によって $\delta A/\delta\eta_n = a_n\psi_1\psi_2\cdots\psi_N$ と書けるが，これが高々 $N-1$ 次の多項式であるためには $a_n = 0$ でなければならず，式 (4－116) が結論される．

---

1) 微小な c 数 ε と，$\boldsymbol{h}(t_F) = \boldsymbol{h}(t_I) = \mathbf{0}$ を満足する任意の a 数ベクトル $\boldsymbol{h}(t)$ を使って $\delta\boldsymbol{\eta}(t) = \varepsilon\boldsymbol{h}(t)$ と表現し，式 (4－114) を

$$\delta A = \varepsilon \int_{t_I}^{t_F} dt \sum_{n=1}^{N_F} h_n(t) \frac{\delta A}{\delta\eta_n(t)} + 0(\varepsilon^2)$$

と表現すれば，式 (2－67) と全く同じ形式になる．

2) 微小な c 数 ε を使って $\delta\eta_n = \varepsilon\xi$ とすればよい．

一例として次のような Lagrangian を考えよう．

$$L(\eta_1, \eta_2, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2) = i\eta_1\dot{\eta}_1 + i\eta_2\dot{\eta}_2 - 2i\omega\eta_1\eta_2 \tag{4-117}$$

ただし，ω は c 数の定数である．式(4－58)に示したように二つの実 a 数の積は「純虚数的」だから，L を「実数的」にするため，つまり $L^* = L$ を成立させるためには各項に虚数単位 i を乗ずる必要がある点に注意しよう．この場合，

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_1} = i\dot{\eta}_1 - 2i\omega\eta_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} = -i\eta_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_2} = i\dot{\eta}_2 + 2i\omega\eta_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_2} = -i\eta_2$$

だから (η_n と $\dot{\eta}_n$ は独立な a 数である点に注意)，Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \eta_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_1} &= i\dot{\eta}_1 - 2i\omega\eta_2 + i\dot{\eta}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\eta}_1 = \omega\eta_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \eta_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_2} &= i\dot{\eta}_2 + 2i\omega\eta_1 + i\dot{\eta}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\eta}_2 = -\omega\eta_1 \end{aligned} \tag{4-118}$$

となる．これは調和振動子に他ならない．すなわち次式が成立する．

$$\ddot{\eta}_1 + \omega^2\eta_1 = 0, \quad \ddot{\eta}_2 + \omega^2\eta_2 = 0 \tag{4-119}$$

a 数は反可換だから Lagrangian における一般座標 $\{\eta_n\}$ やその時間微分 $\{\dot{\eta}_n\}$ の並び方 (順序) が重要である．そこで，$L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t)$ を a 数の単項式の線形結合として表現したとき，各単項式内での a 数の順序に関して次のような規約を設ける．

1) 時間微分に関して高階のものほど右に位置する．

2) 時間微分に関して同じ階数なら添字の大きいものほど右に位置する．

実は式(4－117)の Lagrangian はこの規約に従って表現したものである．

さて，Fermi 系では一般化座標 η_n に共役な正準運動量 ρ_n は

$$\rho_n = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} \quad (n = 1 \sim N_F) \tag{4-120}$$

として定義される．Bose 系の場合とは符号が異なるが，これは Hamiltonian が

$$H(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}, t) \equiv \sum_{n=1}^{N_F} \rho_n\dot{\eta}_n - L(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}, t) \tag{4-121}$$

として定義され，ρ_n が $\dot{\eta}_n$ の左に置かれるからである．実際，$\boldsymbol{\eta}$ が $\boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta}$ に，$\dot{\boldsymbol{\eta}}$ が $\dot{\boldsymbol{\eta}} + \delta\dot{\boldsymbol{\eta}}$ に変化することによって $\boldsymbol{\rho}$ が $\boldsymbol{\rho} + \delta\boldsymbol{\rho}$ に，H が $H + \delta H$ に変化したとすれば

$$\begin{aligned} \delta H &= \sum \delta\rho_n\dot{\eta}_n + \sum \rho_n\delta\dot{\eta}_n - \delta L \\ &= \sum \delta\rho_n\dot{\eta}_n - \sum \delta\dot{\eta}_n\rho_n - \sum \delta\eta_n\frac{\partial L}{\partial \eta_n} - \sum \delta\dot{\eta}_n\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} \end{aligned}$$

$$= \sum \delta\rho_n \dot{\eta}_n - \sum \delta\eta_n \frac{\partial L}{\partial \eta_n} - \sum \delta\dot{\eta}_n \left(\rho_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n}\right) \qquad (4-122)$$

が成立するが，H が正準変数 η，ρ と時間 t のみの関数であるためには任意の $\delta\dot{\eta}_n$ に対して $\delta\dot{\eta}_n(\rho_n + \partial L/\partial\dot{\eta}_n) = 0$ でなければならず，零積定理によって式(4-120)が結論される．ここで，正準運動量 ρ_n が全て a 数であることを前提としているが（従って $\rho_n\delta\dot{\eta}_n = -\delta\dot{\eta}_n\rho_n$），この条件によって Lagrangian の関数形は強い制限を受ける．実際，$L(\eta, \dot{\eta}, t)$ を $\{\eta_n, \dot{\eta}_n\}_{n=1\sim N_F}$ に関する単項式の線形結合として表現すれば，$\{\dot{\eta}_n\}$ を含む項は2次のものに限られ，$\{a_{mn}(t)\}$，$\{b_{mn}(t)\}$ を実数として

$$L(\eta, \dot{\eta}, t) = \sum_{m,n=1}^{N_F} i a_{mn}(t)\eta_m\dot{\eta}_n + \sum_{1\le m<n\le N_F} i b_{mn}(t)\dot{\eta}_m\dot{\eta}_n + L_0(\eta, t) \qquad (4-123)$$

と表現される[1]．それゆえ，式(4-120)によれば正準運動量は

$$\rho_n = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_n} = \sum_{m=1}^{N_F} i a_{mn}(t)\eta_m + \sum_{1\le m<n} i b_{mn}(t)\dot{\eta}_m - \sum_{n<m\le N_F} i b_{nm}(t)\dot{\eta}_m \quad (n = 1 \sim N_F) \qquad (4-124)$$

として与えられる．

Hamiltonian は正準変数 η，ρ と時間 t の関数だから η が $\eta+\delta\eta$ に，ρ が $\rho+\delta\rho$ に変化した場合の H の変化量 δH は

$$\delta H = \sum \delta\eta_n \frac{\partial H}{\partial \eta_n} + \sum \delta\rho_n \frac{\partial H}{\partial \rho_n} \qquad (4-125)$$

と表現でき，式(4-122)と比較して式(4-116)と式(4-120)を使えば

$$0 = \sum \delta\eta_n \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_n} + \frac{\partial L}{\partial \eta_n}\right) + \sum \delta\rho_n \left(\frac{\partial H}{\partial \rho_n} - \dot{\eta}_n\right)$$
$$= \sum \delta\eta_n \left(\frac{\partial H}{\partial \eta_n} - \dot{\rho}_n\right) + \sum \delta\rho_n \left(\frac{\partial H}{\partial \rho_n} - \dot{\eta}_n\right) \qquad (4-126)$$

を得る．これが任意の $\delta\eta$，$\delta\rho$ に対して成立するため零積定理によって正準方程式

$$\dot{\eta}_n = \frac{\partial H}{\partial \rho_n}, \quad \dot{\rho}_n = \frac{\partial H}{\partial \eta_n} \quad (n = 1 \sim N_F) \qquad (4-127)$$

が導かれる．$\dot{\rho}_n$ に関しては Bose 系の場合と符号が異なる点に注意しよう．

---

1) 当然ながら式(4-117)の Lagrangian もこの形式である．Bose 系では Lagrangian の関数形にこのような制限はない．

正準変数 $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ と時間 t の関数として表現される物理量 $F(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},t)$ の時間変化は

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N_F}\left(\dot{\rho}_n\frac{\partial F}{\partial\rho_n}+\dot{\eta}_n\frac{\partial F}{\partial\eta_n}\right)$$
$$=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N_F}\left(\frac{\partial H}{\partial\eta_n}\frac{\partial F}{\partial\rho_n}+\frac{\partial H}{\partial\rho_n}\frac{\partial F}{\partial\eta_n}\right) \quad (4-128)$$

として与えられる．ここで任意の二つの物理量 F, G に対する Grassmann 括弧を

$$\{F,G\}_G\equiv\sum_{n=1}^{N_F}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta_n}\frac{\partial G}{\partial\rho_n}+\frac{\partial F}{\partial\rho_n}\frac{\partial G}{\partial\eta_n}\right) \quad (4-129)$$

で定義すれば，式 (4-128) は

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{H,F\}_G \quad (4-130)$$

と表現できる[1)]．ここで，任意の物理量に対して反対称性を持つ Poisson 括弧と異なり，Grassmann 括弧 $\{F,G\}_G$ の対称性は物理量 F, G に依存する点に注意しよう．例えば F, G 共に Grassmann 偶 (偶数個の a 数の積の線形結合) の場合には，それらを a 数 η_n, ρ_n で微分したものは Grassmann 奇 (奇数個の a 数の積の線形結合) であって互いに反可換だから $\{F,G\}_G=-\{G,F\}_G$ となる．一方，F, G の少なくとも一方が Grassmann 奇の場合には，それを a 数で微分したものは Grassmann 偶であって任意の e 数と可換だから $\{F,G\}_G=\{G,F\}_G$ となる．F, G が共に Grassmann 偶でも Grassmann 奇でもない場合には Grassmann 括弧は対称でも反対称でもない．また，式 (4-129) から簡単に示されるように，正準変数 $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ に関しては

$$\{\eta_m,\rho_n\}_G=\{\rho_n,\eta_m\}_G=\delta_{mn}$$
$$\{\eta_m,\eta_n\}_G=\{\rho_m,\rho_n\}_G=0 \quad (m,n=1\sim N_F) \quad (4-131)$$

が成立する ($\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ は Grassmann 奇だから Grassmann 括弧は対称である)．

ところで，式 (4-120) が $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ に関して解ければ，$\dot{\boldsymbol{\eta}}$ は正準変数 $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$ 及び時間 t の関数として表現でき，これを式 (4-121) の右辺に代入することによって $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$, t の関数としての Hamiltonian $H(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},t)$ が決まる．しかし，式 (4-120) が常に $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ に関して解けるとは限らない．例えば，式 (4-117) の Lagrangian では

$$\rho_1=-\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}_1}=i\eta_1,\quad \rho_2=-\frac{\partial L}{\partial\dot{\eta}_2}=i\eta_2 \quad (4-132)$$

だから $\dot{\eta}_1$, $\dot{\eta}_2$ は η_1, η_2, ρ_1, ρ_2 の関数としては表現できない．このように，式

1) 一方，Bose 系では物理量 F の時間変化は Poisson 括弧 $\{.,.\}_P$ を使って $\dot{F}=\partial F/\partial t+\{F,H\}_P$ と書ける．括弧内における F と H の順序に注意して欲しい．式 (5-40), (5-41) を参照のこと．

(4－120)が $\dot{\eta}$ に関して解けない系は特異系と呼ばれるが，式(4－122)で $\delta\dot{\eta}_n$ の係数が零となることから分かるように，特異系であっても式(4－121)の右辺からは自動的に $\dot{\eta}$ が消え，Hamiltonian は η，ρ，t の関数となる．例えば式(4－117)の Lagrangian では

$$H(\eta,\rho,t) = (i\eta_1)\dot{\eta}_1 + (i\eta_2)\dot{\eta}_2 - (i\eta_1\dot{\eta}_1 + i\eta_2\dot{\eta}_2 - 2i\omega\eta_1\eta_2) = 2i\omega\eta_1\eta_2 \tag{4-133}$$

となり，$\dot{\eta}_1$，$\dot{\eta}_2$ は確かに消えてしまう．ただし，式(4－132)が拘束条件となるために，正準方程式は式(4－127)のままでは成立しない[1]．もちろん式(4－126)に対応して

$$0 = \sum_{n=1}^{2}\delta\eta_n\left(\frac{\partial H}{\partial\eta_n} - \dot{\rho}_n\right) + \sum_{n=1}^{2}\delta\rho_n\left(\frac{\partial H}{\partial\rho_n} - \dot{\eta}_n\right) \tag{4-134}$$

は成立するが，式(4－132)によって $\delta\eta_n$，$\delta\rho_n$ は独立ではなく

$$i\delta\eta_1 - \delta\rho_1 = 0, \quad i\delta\eta_2 - \delta\rho_2 = 0 \tag{4-135}$$

に拘束されるからである．幸いにも，Lagrangeの未定乗数法を使って

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{2}\delta\eta_n\left(\frac{\partial H}{\partial\eta_n} - \dot{\rho}_n\right) + \sum_{n=1}^{2}\delta\rho_n\left(\frac{\partial H}{\partial\rho_n} - \dot{\eta}_n\right) + \sum_{n=1}^{2}(i\delta\eta_n - \delta\rho_n)\lambda_n \\ &= \sum_{n=1}^{2}\delta\eta_n\left(\frac{\partial H}{\partial\eta_n} - \dot{\rho}_n + i\lambda_n\right) + \sum_{n=1}^{2}\delta\rho_n\left(\frac{\partial H}{\partial\rho_n} - \dot{\eta}_n - \lambda_n\right) \end{aligned} \tag{4-136}$$

と表現すれば，未定乗数 λ_1，λ_2 の導入によって $\delta\eta_n$，$\delta\rho_n$ は形式的には独立となり

$$\frac{\partial H}{\partial\rho_n} - \dot{\eta}_n - \lambda_n = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial\eta_n} - \dot{\rho}_n + i\lambda_n = 0 \quad (n = 1, 2) \tag{4-137}$$

が結論される．これに式(4－133)を代入すれば

$$\dot{\eta}_1 = \frac{\partial H}{\partial\rho_1} - \lambda_1 = -\lambda_1, \quad \dot{\rho}_1 = \frac{\partial H}{\partial\eta_1} + i\lambda_2 = 2i\omega\eta_2 + i\lambda_1$$

$$\dot{\eta}_2 = \frac{\partial H}{\partial\rho_2} - \lambda_2 = -\lambda_2, \quad \dot{\rho}_2 = \frac{\partial H}{\partial\eta_2} + i\lambda_2 = -2i\omega\eta_1 + i\lambda_2 \tag{4-138}$$

が導かれ，未定乗数は $\lambda_n = -\dot{\eta}_n = i\dot{\rho}_n$ として決まる．また，ρ_1，ρ_2 に関しては

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= 2i\omega\eta_2 + i\lambda_1 = 2\omega\rho_2 - \dot{\rho}_1 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_1 = \omega\rho_2 \\ \dot{\rho}_2 &= -2i\omega\eta_1 + i\lambda_2 = -2\omega\rho_1 - \dot{\rho}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_2 = -\omega\rho_1 \end{aligned} \tag{4-139}$$

1) 特異系や拘束系に関しては5章で詳述する．

を得る．

式$(4-117)$の Lagrangian から $\eta_1\eta_2$ の時間微分を引いて新しい Lagrangian

$$\begin{aligned}L' &= L - \frac{d}{dt}\eta_1\eta_2 = i(\eta_1\dot{\eta}_1 + \eta_2\dot{\eta}_2 + i\eta_1\dot{\eta}_2 - i\eta_2\dot{\eta}_1) - 2i\omega\eta_1\eta_2 \\ &= i(\eta_1 - i\eta_2)(\dot{\eta}_1 + i\dot{\eta}_2) - \omega(\eta_1 - i\eta_2)(\eta_1 + i\eta_2) \\ &= i\eta^*\dot{\eta} - \omega\eta^*\eta \quad (\eta \equiv \eta_1 + i\eta_2)\end{aligned} \tag{4-140}$$

を定義しよう．$\eta_1\eta_2$ の時間微分の項は作用積分の停留値問題には何の関与もしないので，L' で記述される系は L で記述される系と同じである．また，η_1，η_2 を線形変換して得られる η, η^* を一般化座標として選ぶことができる．このとき，η, η^* に正準共役な運動量を ρ, ρ_0 とすれば

$$\rho = -\frac{\partial L'}{\partial \dot{\eta}} = i\eta^*, \quad \rho_0 = -\frac{\partial L'}{\partial \dot{\eta}^*} = 0 \tag{4-141}$$

となり (ρ_0 は ρ の複素共役ではないので ρ^* と記せない)，Hamiltonian は

$$H = \rho\dot{\eta} + \rho_0\dot{\eta}^* - (i\eta^*\dot{\eta} - \omega\eta^*\eta) = \omega\eta^*\eta = -i\omega(i\eta^*)\eta = -i\omega\rho\eta \tag{4-142}$$

と書ける．この場合も式$(4-141)$は拘束条件となり，式$(4-137)$に対応して

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} - \dot{\eta} - \lambda_1 = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \rho_0} - \dot{\eta}^* + \lambda_2 = 0 \tag{4-143}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} - \dot{\rho} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta^*} - \dot{\rho}_0 + i\lambda_1 = 0 \tag{4-144}$$

が成立する．ところが，式$(4-141)$から ρ_0 は定数だから $\dot{\rho}_0 = 0$ であり，式$(4-142)$によって $\partial H/\partial\eta^* = 0$ だから式$(4-144)$の2番目の方程式から $\lambda_1 = 0$ が言える．それゆえ，1番目と3番目の式は

$$\dot{\eta} = \frac{\partial H}{\partial \rho}, \quad \dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial \eta} \tag{4-145}$$

と書けるが，これは一組の正準変数 η, ρ で記述される系の正準方程式と同じ形をしている．しかも，式$(4-142)$の Hamiltonian は η^* や ρ_0 を含まず，η, ρ のみの関数である．このように，複素変数 η を導入することによって本来は二組の正準変数で記述される拘束系としての調和振動子が，一組の正準変数 η, ρ で記述される非拘束系として表現されることになる．

4-5　Grassmann 数で記述される量子系

Bose 系の量子論では全ての物理量は状態空間と呼ばれる複素 Hilbert 空間上の

Hermite 作用素として表現され，Hermite 作用素の固有値が対応する物理量の観測値を与えるのであった．Fermi 系では正準変数という基本的な物理量が a 数だから，Fermi 系でも同じ形式で量子論が展開できるとすれば「a 数を固有値とする作用素」という概念が必要になる．そして，その作用素が作用すべき状態空間は a 数を乗ずるという演算に関して閉じていなければならない．更には a 数を複数回乗ずるという演算も許される筈であり，結局は e 数を乗ずるという演算に関して閉じていることが要求される．

例えば a 数を e 数に対応付ける関数 (K_N^* から $\mathfrak{G}(K_N^*)$ への写像) の集合を V_G とし，V_G の二つの元 f，g の和 $f+g$，および e 数 $\mathsf{a} \in \mathfrak{G}(K_N^*)$ と $f \in V_G$ との積 $\mathsf{a}f$ を

$$(f+g)(\xi) = f(\xi) + g(\xi), \quad (\mathsf{a}f)(\xi) = \mathsf{a}f(\xi) \qquad (4-146)$$

で定義すれば，V_G はこれら 2 種類の演算 (和と e 数倍) に関して閉じており，

$$\text{単位元 } 1 \in \mathfrak{G}(K_N^*) \text{ が存在し，任意の } f \in V_G \text{ に対して } 1f = f \qquad (4-147a)$$

$$\text{零元 } 0 \in V_G \text{ が存在し，任意の } f \in V_G \text{ に対して } f + 0 = f \qquad (4-147b)$$

$$\text{任意の } f \in V_G \text{ に逆元 } x \in V_G \text{ が存在し，} f + x = 0 \qquad (4-147c)$$

となることが分かる．零元とは全ての $\xi \in K_N^*$ に $0 \in \mathfrak{G}(K_N^*)$ を対応付ける写像であり，$f \in V_G$ の逆元とは $\xi \in K_N^*$ に $x(\xi) \equiv -f(\xi) \in \mathfrak{G}(K_N^*)$ を対応付ける写像である．また，$f, g, h \in V_G$，$\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathfrak{G}(K_N^*)$ とするとき

$$\begin{aligned} &f + g = g + f, \quad (f+g)+h = f+(g+h) \\ &\mathsf{a}(f+g) = \mathsf{a}f + \mathsf{a}g, \quad (\mathsf{a}+\mathsf{b})f = \mathsf{a}f + \mathsf{b}f, \quad (\mathsf{ab})f = \mathsf{a}(\mathsf{b}f) \end{aligned} \qquad (4-147d)$$

が成立する．このように V_G は e 数をスカラとするベクトル空間のように振る舞うが，$\mathfrak{G}(K_N^*)$ は体の構造を持たないから通常の意味でのベクトル空間ではない．ベクトル空間との違いを明確にするため，式 (4-147) の条件を満足する和と e 数倍が定義された集合を Grassmann ベクトル空間，あるいは G-ベクトル空間と呼ぶことにしよう．簡単のため 1 変数関数の集合を例としたが，多変数関数の集合が G-ベクトル空間を成すことも容易に示される．以後，M 変数関数 (M 個の a 数の組から e 数への写像) の集合が作る G-ベクトル空間を V_G^M で表し，これらに限らず式 (4-147) の条件のみによって規定される一般的な (抽象的な) G-ベクトル空間を V_G で表すことにする．また，必要に応じて G-ベクトル空間の元をケット $|\mathsf{f}\rangle, |\mathsf{g}\rangle, \cdots$ で表すこともある．

V_G から V_G への写像，つまり V_G 上の作用素として最も簡単なのは e を e 数とし

て V_G の元 $|\mathsf{f}\rangle$ を $\mathsf{e}|\mathsf{f}\rangle$ に写す写像 P_e であろう $(P_e(|\mathsf{f}\rangle) = \mathsf{e}|\mathsf{f}\rangle)$．定数を乗ずるだけの写像は線形写像であると期待されるが，e 数は可換とは限らないので一般には

$$P_e(\mathsf{a}|\mathsf{f}\rangle + \mathsf{b}|\mathsf{g}\rangle) \neq \mathsf{a}P_e(|\mathsf{f}\rangle) + \mathsf{b}P_e(|\mathsf{g}\rangle) \qquad (\mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathfrak{G}(K_N^*)) \tag{4-148a}$$

である．しかし，スカラを e 数全体ではなく c 数に限れば

$$P_e(a|\mathsf{f}\rangle + b|\mathsf{g}\rangle) = aP_e(|\mathsf{f}\rangle) + bP_e(|\mathsf{g}\rangle) \qquad (a, b \in K) \tag{4-148b}$$

が成立し，この意味では P_e は線形である．このように，c 数に制限すれば線形な作用素を Grassmann 線形作用素，あるいは G-線形作用素と呼ぶ．例えば，微分演算子 $\partial/\partial\xi$ や定積分演算子 $\int d\xi$ は V_G^M 上の G-線形作用素である．

ところで，V_G^1 の任意の元 f は ξ に依存しない e 数 f_0，f_1 によって

$$f(\xi) = f_0 + f_1\xi = f_0 + \xi(f_1)_d$$

と書けるから，

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}f + \frac{\partial}{\partial\xi}\xi f = \xi(f_1)_d + f_0 = f_1\xi + f_0 = f$$

が成立する．それゆえ，G-ベクトル空間上の作用素 $\widehat{A}$，$\widehat{B}$ に対する反交換子を

$$\{\widehat{A}, \widehat{B}\} \equiv \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}\widehat{A} \tag{4-149}$$

で定義し，恒等作用素を $\widehat{I}$，ξ を乗ずる働きを持つ作用素 $\xi\widehat{I}$ を $\widehat{\xi}$ と記せば

$$\left\{\widehat{\xi}, \frac{\partial}{\partial\xi}\right\} \equiv \widehat{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}\widehat{\xi} = \widehat{I} \tag{4-150}$$

が結論される．より一般に，V_G^M 上の微分演算子 $\{\partial/\partial\xi_m\}_{m=1\sim M}$，および ξ_m を乗ずるという働きを持つ V_G^M 上の作用素 $\{\widehat{\xi}_m\}_{m=1\sim M}$ に対して

$$\left\{\widehat{\xi}_m, \frac{\partial}{\partial\xi_n}\right\} = \delta_{mn}\widehat{I}, \quad \left\{\widehat{\xi}_m, \widehat{\xi}_n\right\} = \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_m}, \frac{\partial}{\partial\xi_n}\right\} = \widehat{0} \tag{4-151}$$

が成立することも容易に理解できるだろう[1]．$\widehat{0}$ は零作用素，すなわち V_G^M の全ての元を零元に写す写像である．

さて，G-ベクトル空間 V_G 上の G-線形作用素 $\widehat{A}$ に対して

$$\widehat{A}|\mathsf{a}\rangle = \mathsf{a}|\mathsf{a}\rangle \tag{4-152}$$

を満足するケット $|\mathsf{a}\rangle \in V_G \quad (|\mathsf{a}\rangle \neq 0)$ と e 数 a が存在した場合，a を $\widehat{A}$ の固有値，

1)　章末の演習問題 3 参照．

$|\mathsf{a}\rangle$ を固有値 a に属する $\widehat{A}$ の固有ベクトル (固有ケット) と呼ぶ. 例えば η を a 数としたとき, V_G^M の関数であるデルタ関数と指数関数は

$$\widehat{\xi}_m\delta(\xi_m-\eta)=\xi_m(\xi_m-\eta)=-\xi_m\eta=\eta(\xi_m-\eta)=\eta\delta(\xi_m-\eta)$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi_m}\exp(\xi_m\eta)=\frac{\partial}{\partial\xi_m}(1+\xi_m\eta)=\eta=\eta(1+\xi_m\eta)=\eta\exp(\xi_m\eta) \tag{4-153}$$

を満足するから, それぞれ $\widehat{\xi}_m$ と $\partial/\partial\xi_m$ の固有値 η に属する固有ベクトルである.

G-ベクトル空間 V_G 上の内積 $(.,.)$ は V_G の元の順序対を e 数に写す写像であり,

$$(a_1|\mathsf{f}_1\rangle+a_2|\mathsf{f}_2\rangle,|\mathsf{g}\rangle)=a_1^*(|\mathsf{f}_1\rangle,|\mathsf{g}\rangle)+a_2^*(|\mathsf{f}_2\rangle,|\mathsf{g}\rangle)$$
$$(|\mathsf{f}\rangle,b_1|\mathsf{g}_1\rangle+b_2|\mathsf{g}_2\rangle)=b_1(|\mathsf{f}\rangle,|\mathsf{g}_1\rangle)+b_2(|\mathsf{f}\rangle,|\mathsf{g}_2\rangle) \tag{4-154}$$
$$(a_1,a_2,b_1,b_2\in K)$$

を満足するものとして定義される[1]. つまり $(|\mathsf{f}\rangle,|\mathsf{g}\rangle)$ を $|\mathsf{f}\rangle$ と $|\mathsf{g}\rangle$ に依存する e 数値関数と考えれば, 第 1 変数 $|\mathsf{f}\rangle$ に関しては反 G-線形であり, 第 2 変数 $|\mathsf{g}\rangle$ に関しては G-線形である[2]. 例えば V_G^M の二つの元 f, g に e 数を対応させる写像 (f,g) を

$$(f,g)\equiv\int d\boldsymbol{\xi}f^*(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi})$$
$$=\int d\xi_1d\xi_2\cdots d\xi_Mf^*(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)g(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M) \tag{4-155}$$

で定義すれば, $(.,.)$ が式 (4-154) を満足することは容易に分かる. 従って $(.,.)$ は V_G^M 上の内積である. ただし, 式 (1-1d) に記述されている内積の正値性は成立しない. 例えば V_G^1 で式 (4-155) の内積を採用すると, $f(\xi)=\xi$ の場合には $f\neq0$ にも関わらず $(f,f)=0$ である.

V_G 上の作用素 $\widehat{A}$ が与えられたとき, 任意の $|\mathsf{f}\rangle,|\mathsf{g}\rangle\in V_G$ に対して

$$(|\mathsf{f}\rangle,\widehat{A}|\mathsf{g}\rangle)=(\widehat{B}|\mathsf{f}\rangle,|\mathsf{g}\rangle) \tag{4-156}$$

を満足する作用素 $\widehat{B}$ が存在する場合, $\widehat{B}$ を $\widehat{A}$ の共役作用素と呼び $\widehat{B}=\widehat{A}^\dagger$ と記す. こうした共役演算が式 (1-4) の性質を持ち, $(\widehat{A}^\dagger)^\dagger=\widehat{A}$ が成立することは言うまで

---

1) Hilbert 空間上の内積が満足すべき性質は式 (1-1a)~(1-1d) に示したが, これらのうち (1-1b) と (1-1c) を要求したのが式 (4-154) である.

2) K が実数体の場合は a_1^*, a_2^* は a_1, a_2 と同じだから第 1 変数に関しても G-線形となる. ただし, 二つの実 a 数の積が純虚数的に振る舞うことから K が実数体の場合でも複素共役演算を使わずに議論することはできない.

もない．また，自身の共役作用素に等しい作用素を Hermite 作用素と呼ぶのも Bose 系の場合と同様である．例えば V_G^M の任意の元 f，g に対して

$$(f,\widehat{\xi}_m g)=\int d\xi_1\cdots d\xi_M f^*\{\xi_m g\}=\int d\xi_1\cdots d\xi_M\{\xi_m f\}^* g=(\widehat{\xi}_m f,g) \tag{4-157}$$

が成立するから $\widehat{\xi}_m$ は Hermite である．一方，f，g は ξ_m に依存しない e 数を係数として $f=f_0+f_1\xi_m$，$g=g_0+g_1\xi_m$ と表現でき

$$\int d\xi_m(f_0+f_1\xi_m)^*\frac{\partial}{\partial\xi_m}(g_0+g_1\xi_m)=f_1^*(g_1)_d$$

$$=\int d\xi_m\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_m}(f_0+f_1\xi_m)\right\}^*(g_0+g_1\xi_m)$$

が成立するから

$$\begin{aligned}\left(f,\frac{\partial}{\partial\xi_m}g\right)&=(-1)^{M-m}\int d\xi_1\cdots d\xi_{m-1}d\xi_{m+1}d\xi_M\int d\xi_m f^*\frac{\partial}{\partial\xi_m}g\\&=(-1)^{M-m}\int d\xi_1\cdots d\xi_{m-1}d\xi_{m+1}d\xi_M\int d\xi_m(\frac{\partial}{\partial\xi_m}f)^*g\\&=(\frac{\partial}{\partial\xi_m}f,g)\end{aligned} \tag{4-158}$$

が導かれ，$\partial/\partial\xi_m$ もまた Hermite であることが結論される．、

G-ベクトル空間 V_G 上の内積 $(.,.)$ が与えられたとき，第 1 変数 $|\mathsf{f}\rangle$ を任意に固定すれば $(|\mathsf{f}\rangle,.)$ は V_G から $\mathfrak{G}(K_N^*)$ への G-線形写像である．1 章の 1–1 節で展開した Hilbert 空間に対する議論を繰り返せば，V_G から $\mathfrak{G}(K_N^*)$ への G-線形写像の集合に和と e 数倍を定義して G-ベクトル空間が構成できる．これを V_G の双対空間と呼び，V_G^* と記す．Bose 系の場合と同様に V_G^* の元 $(|\mathsf{f}\rangle,.)$ をブラと呼び，$\langle\mathsf{f}|$ と略記する．従って e 数 $(|\mathsf{f}\rangle,|\mathsf{g}\rangle)$ はブラケット $\langle\mathsf{f}|\mathsf{g}\rangle$ として表記される．また，式 (1−7) に対応してケット $|\mathsf{f}\rangle$ やブラ $\langle\mathsf{f}|$ の共役を

$$|\mathsf{f}\rangle^\dagger\equiv\langle\mathsf{f}|=(|\mathsf{f}\rangle,.),\quad \langle\mathsf{f}|^\dagger\equiv|\mathsf{f}\rangle \tag{4-159}$$

で定義し，共役演算がブラやケットまで含めて式 (1−4) の性質を持つと考える．また，e 数 a は作用素 $\mathsf{a}\widehat{I}$ ($\widehat{I}$ は恒等作用素) と解釈し，

$$(\mathsf{a}|\mathsf{f}\rangle)^\dagger=(\mathsf{a}\widehat{I}|\mathsf{f}\rangle)^\dagger=|\mathsf{f}\rangle^\dagger\widehat{I}^\dagger\mathsf{a}^*=\langle\mathsf{f}|\mathsf{a}^* \tag{4-160}$$

とする．

さて，G-ベクトル空間 V_G の元の組 $\{|\mathsf{u}_n\rangle\}_{n=1\sim D}$ によって V_G の任意の元 $|\mathsf{f}\rangle$ が

$$|\mathsf{f}\rangle = \sum_{n=1}^{D} \mathsf{f}_n |\mathsf{u}_n\rangle \quad (\mathsf{f}_n \in \mathfrak{G}(K_N^*)) \tag{4-161}$$

と一意的に展開できるとき，$\{|\mathsf{u}_n\rangle\}_{n=1\sim D}$ を V_G の基底と呼び，$\dim(V_G) \equiv D$ を V_G の次元という．例えば V_G^M の任意の元 f は式 (4-63) のように一意的に展開されるから

$$\begin{aligned} &1, \quad \{\xi_{m_1}\}_{1\le m_1\le M}, \quad \{\xi_{m_1}\xi_{m_2}\}_{1\le m_1,m_2\le M}, \quad \cdots \\ &\quad \cdots, \{\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_M}\}_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_M\le M} \end{aligned} \tag{4-162}$$

は V_G^M の基底であり，$\dim(V_G^M) = 2^M$ である．ところで，一つの ξ_m に着目したとき，式 (4-162) の各単項式には ξ_m が 1 回だけ含まれるか，あるいは全く含まれないかの何れかである．それゆえ M 桁の 2 進数 $b_1b_2\cdots b_M$ を考え，各 m $(1\le m\le M)$ について ξ_m が注目する単項式に含まれるか否かに応じて $b_1b_2\cdots b_M$ の第 m 桁 b_m を 1 か 0 にすれば，単項式は 2 進数 $b_1b_2\cdots b_M$ と 1 対 1 に対応する．そこで，$b_1b_2\cdots b_M$ に対応する単項式 $\xi_{m_1}\xi_{m_2}\cdots\xi_{m_R}$ をケット $|b_1b_2\cdots b_M\rangle$ で表すことにする[1]．例えば "0⋯0" が零の並びを表すとすれば，$|0\cdots0\rangle$ は式 (4-162) における 1 を意味し，$|010110\cdots0\rangle$ は $\xi_2\xi_4\xi_5$ に対応する．そして式 (4-162) の基底は $\{|b_1b_2\cdots b_M\rangle\}_{b_1,b_2,\cdots,b_M=0,1}$ と表現され，V_G^M の元 f をケット $|f\rangle$ で表せば，$|f\rangle$ は

$$|f\rangle = \sum_{b_1,\cdots,b_M=0,1} f_{b_1,\cdots,b_M}|b_1\cdots b_M\rangle, \quad (f_{b_1,\cdots,b_M} \in \mathfrak{G}(K_N^*)) \tag{4-163}$$

と展開できることになる．

Bose 系の場合と同様に，V_G の基底 $\{|\mathsf{u}_n\rangle\}_{n=1\sim D}$ に対する双対基底もまた

$$\langle \mathsf{u}_m^c|\mathsf{u}_n\rangle = \delta_{mn} \tag{4-164}$$

を満足する V_G^* の元の組 $\{\langle \mathsf{u}_n^c|\}_{n=1\sim D}$ として定義される[2]．一例として，V_G^M の基底 $\{|b_1\cdots b_M\rangle\}$ に対する双対基底を求めてみよう．そのため，$b_1\cdots b_M$ の補数 (各桁の 0 を 1 に，1 を 0 に変えて得られる数) を $\overline{b_1\cdots b_M}$ と記すことにし，二つのケット

$$|\overline{b_1\cdots b_M}\rangle = \xi_{m_1}\cdots\xi_{m_R}, \quad |d_1\cdots d_M\rangle = \xi_{n_1}\cdots\xi_{n_S} \tag{4-165}$$

---

1) 次節では量子化された調和振動子における個数作用素の固有ケットを $|0\rangle, |1\rangle$ で表すが，ここで定義する $|0\rangle, |1\rangle$ とは異なる点に注意しよう．

2) $\langle u_n| \equiv (|u_n\rangle, .)$ は一般的には $\langle u_n^c|$ とは異なるから，双対基底を $\{\langle u_n|\}_{n=1\sim D}$ と記すことはできない．

の内積

$$p_{\bar{b}d} \equiv \langle \overline{b_1 \cdots b_M} | d_1 \cdots d_M \rangle = \int d\boldsymbol{\xi} (\xi_{m_1} \cdots \xi_{m_R})^* \xi_{n_1} \cdots \xi_{n_S} \qquad (4-166)$$

を計算する．ここで，$M_R \equiv (m_1, \cdots, m_R)$ は $b_m = 0$ となる m を小さい順に並べたもの，$N_S \equiv (n_1, \cdots, n_S)$ は $d_n = 1$ となる n を小さい順に並べたものとなる点に注意しよう．従って $b_1 \cdots b_M \neq d_1 \cdots d_M$ ならば積 $(\xi_{m_1} \cdots \xi_{m_R})^* \xi_{n_1} \cdots \xi_{n_S}$ は同じ a 数を 2 回含むから $p_{\bar{b}d} = 0$ である．一方，$b_1 \cdots b_M = d_1 \cdots d_M$ ならば M_R と N_S は共通要素を持たず，1 から M までの整数はどちらか一方に必ず含まれる．従って $S = M - R$ であり，$p_{\bar{b}b}$ は

$$\begin{aligned} p_{\bar{b}b} &= \int d\boldsymbol{\xi} (\xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_R})^* \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_{M-R}} \\ &= \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_M \xi_{m_R} \cdots \xi_{m_2} \xi_{m_1} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_{M-R}} \\ &= \varepsilon(\sigma^{m_R, \cdots, m_2, m_1, n_1, n_2, \cdots, n_{M-R}}_{M, \cdots, 2, 1}) \end{aligned} \qquad (4-167)$$

と書ける．つまり，$p_{\bar{b}b}$ は $(m_R, \cdots, m_2, m_1, n_1, n_2, \cdots, n_{M-R})$ を $(M, \cdots, 2, 1)$ に並び替える置換の符号に等しい．以上により

$$p_{\bar{b}d} = p_{\bar{b}b} \delta_{bd}, \quad \delta_{bd} \equiv \begin{cases} 1 & b_1 b_2 \cdots b_M = d_1 d_2 \cdots d_M \\ 0 & b_1 b_2 \cdots b_M \neq d_1 d_2 \cdots d_M \end{cases} \qquad (4-168)$$

が結論され，$\{|b_1 \cdots b_M\rangle\}$ の双対基底が

$$\langle (b_1 \cdots b_M)^c | = p_{\bar{b}b} \langle \overline{b_1 \cdots b_M} | \quad (b_1, \cdots, b_M = 0, 1) \qquad (4-169)$$

として与えられることが分かる．実際，

$$\langle (b_1 \cdots b_M)^c | d_1 \cdots d_M \rangle = p_{\bar{b}b} \langle \overline{b_1 \cdots b_M} | d_1 \cdots d_M \rangle = (p_{\bar{b}b})^2 \delta_{bd} = \delta_{bd}$$

が成立するからである．

ところで，$b_1 \cdots b_M$ に含まれる 1 の数を N_1 とすれば $|b_1 \cdots b_M\rangle$ は N_1 個の a 数の積であり，従って N_1 の偶・奇に応じて Grassmann 偶・奇である．一方，$\overline{b_1 \cdots b_M}$ に含まれる 1 の数は $M - N_1$ だが，$\langle \overline{b_1 \cdots b_M} | \equiv (|\overline{b_1 \cdots b_M}\rangle, .)$ は式 (4-155) の内積を介して定義され，その内積には M 個の Grassmann 数の積 $d\boldsymbol{\xi}$ が含まれる点に注意しよう．それゆえ $\langle (b_1 \cdots b_M)^c | = p_{\bar{b}b} \langle \overline{b_1 \cdots b_M} |$ は $2M - N_1$ の偶・奇，すなわち N_1 の偶・奇に応じて Grassmann 偶・奇となる．こうして「V_G^M の基底 $\{|b_1 \cdots b_M\rangle\}$，及びその双対基底 $\{\langle (b_1 \cdots b_M)^c |\}$ を構成するケットやブラは，$b_1 \cdots b_M$ に含まれる 1 の数の偶・奇に応じて Grassmann 偶・奇である」ことが分かる．

例えば $M = 1$ の場合を考えよう．この場合，式 (4-167) から $p_{\bar{0}0} = p_{\bar{1}1} = 1$ と

なり，これを式 (*4-169*) に代入すれば V_G^1 の基底 $\{|b\rangle\}_{b=0,1}$ の双対基底 $\{\langle b^c|\}_{b=0,1}$ として

$$\langle 0^c| = |1\rangle^\dagger = \langle 1|, \quad \langle 1^c| = |0\rangle^\dagger = \langle 0| \tag{4-170}$$

を得る．V_G^1 の任意の元 $|f\rangle$ は $|f\rangle = f_0|0\rangle + f_1|1\rangle$ と書けるから，その共役は

$$\langle f| = |f\rangle^\dagger = |0\rangle^\dagger f_0^* + |1\rangle^\dagger f_1^* = \langle 1^c|f_0^* + \langle 0^c|f_1^* \tag{4-171}$$

である．これを $|g\rangle = g_0|0\rangle + g_1|1\rangle$ に作用させ，$|0\rangle, \langle 0^c|$ が Grassmann 偶，$|1\rangle, \langle 1^c|$ が Grassmann 奇であることを利用すれば

$$\begin{aligned}
\langle f|g\rangle &= (\langle 1^c|f_0^* + \langle 0^c|f_1^*)(g_0|0\rangle + g_1|1\rangle) \\
&= \langle 1^c|f_0^* g_0|0\rangle + \langle 1^c|f_0^* g_1|1\rangle + \langle 0^c|f_1^* g_0|0\rangle + \langle 0^c|f_1^* g_1|1\rangle \\
&= (f_0^* g_0)_d\langle 1^c|0\rangle + (f_0^* g_1)_d\langle 1^c|1\rangle + f_1^* g_0\langle 0^c|0\rangle + f_1^* g_1\langle 0^c|1\rangle \\
&= (f_0^* g_1)_d + f_1^* g_0
\end{aligned} \tag{4-172}$$

を得るが，これは本来の内積に戻って得られる結果

$$\langle f|g\rangle = \int d\xi (f_0 + f_1\xi)^*(g_0 + g_1\xi) = f_1^* g_0 + (f_0^* g_1)_d \tag{4-173}$$

と一致する．

以上の結果に基づき，Hamiltonian $H(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}, t)$ で記述される古典 Fermi 系の正準量子化について考えよう．Fermi 系の正準変数 $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}$ は式 (*4-131*) の正準条件によって特徴付けられるが，これを G-線形作用素 $\widehat{\boldsymbol{\eta}}$, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ に関する正準反交換関係

$$\begin{aligned}
&\{\widehat{\eta}_m, \widehat{\rho}_n\} = \{\widehat{\rho}_n, \widehat{\eta}_m\} = i\delta_{mn}\widehat{I} \\
&\{\widehat{\eta}_m, \widehat{\eta}_n\} = \{\widehat{\rho}_m, \widehat{\rho}_n\} = \widehat{0} \quad (m, n = 1 \sim N_F)
\end{aligned} \tag{4-174}$$

で置き換えるのが正準量子化である．そして，量子系の Hamiltonian $\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}}, \widehat{\boldsymbol{\rho}}, t)$ が与えられれば，任意の物理量 $\widehat{F}(\widehat{\boldsymbol{\eta}}, \widehat{\boldsymbol{\rho}}, t)$ は式 (*1-46*) の Heisenberg の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\widehat{F} = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{F} + i^{-1}[\widehat{F}, \widehat{H}] \tag{4-175}$$

に従って変化する．ここで，右辺に登場するのは反交換子 $\{\widehat{F}, \widehat{H}\}$ ではなく Bose 系と同じく交換子 $[\widehat{F}, \widehat{H}]$ である点に注意しよう．例えば式 (*4-142*) の Hamiltonian で記述される古典系は $\widehat{H} = -i\omega\widehat{\rho}\widehat{\eta}$ を Hamiltonian とする量子系に対応し

$$\frac{d}{dt}\widehat{\eta} = i^{-1}[\widehat{\eta}, \widehat{H}] = -\omega(\widehat{\eta}\widehat{\rho}\widehat{\eta} - \widehat{\rho}\widehat{\eta}\widehat{\eta}) = -\omega\widehat{\eta}\widehat{\rho}\widehat{\eta} = -\omega\widehat{\eta}(i - \widehat{\eta}\widehat{\rho}) = -i\omega\widehat{\eta}$$

$$\frac{d}{dt}\widehat{\rho} = i^{-1}[\widehat{\rho}, \widehat{H}] = -\omega(\widehat{\rho}\widehat{\rho}\widehat{\eta} - \widehat{\rho}\widehat{\eta}\widehat{\rho}) = \omega\widehat{\rho}\widehat{\eta}\widehat{\rho} = \omega(i - \widehat{\eta}\widehat{\rho})\widehat{\rho} = i\omega\widehat{\rho} \tag{4-176}$$

を得るが，これは古典系の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\eta = \{\eta, H\}_G = \frac{\partial\eta}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\rho} + \frac{\partial\eta}{\partial\rho}\frac{\partial H}{\partial\eta} = \frac{\partial H}{\partial\rho} = \frac{\partial}{\partial\rho}(-i\omega\rho\eta) = -i\omega\eta$$
$$\frac{d}{dt}\rho = \{\rho, H\}_G = \frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\rho} + \frac{\partial\rho}{\partial\rho}\frac{\partial H}{\partial\eta} = \frac{\partial H}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}(-i\omega\rho\eta) = i\omega\rho \tag{4-177}$$

と完全に符合している．

ところで，式 (4-151) から分かるように，状態空間として $V_G^{N_F}$ を選び

$$\widehat{\eta}_n = \xi_n\widehat{I}, \quad \widehat{\rho}_n = i\frac{\partial}{\partial\xi_n} \quad (n = 1 \sim N_F) \tag{4-178}$$

とすれば式 (4-174) が満足される[1]．そして，この表現によれば $\widehat{\eta}_n$ や $\widehat{\rho}_n$ が a 数と反可換であること，つまり

$$\zeta\widehat{\eta}_n = -\widehat{\eta}_n\zeta, \quad \zeta\widehat{\rho}_n = -\widehat{\rho}_n\zeta \qquad (\zeta \in K_N^*) \tag{4-179}$$

を示すのは容易である．また，式 (4-157) や式 (4-158) によれば

$$(\widehat{\eta}_n)^\dagger = \widehat{\eta}_n, \quad (\widehat{\rho}_n)^\dagger = -\widehat{\rho}_n \tag{4-180}$$

が成立するから $\widehat{\eta}$ は Hermite であり，$\widehat{\rho}$ は反 Hermite である．そして a 数の組 $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N_F})$，$\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{N_F})$ でラベル付される $V_G^{N_F}$ のケット $|\boldsymbol{\eta}\rangle, |\boldsymbol{\rho}\rangle$ を

$$|\boldsymbol{\eta}\rangle \equiv \delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) = \delta(\xi_1 - \eta_1)\delta(\xi_2 - \eta_2)\cdots\delta(\xi_{N_F} - \eta_{N_F})$$
$$|\boldsymbol{\rho}\rangle \equiv \exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\xi}) = \exp(i\rho_1\xi_1)\exp(i\rho_2\xi_2)\cdots\exp(i\rho_{N_F}\xi_{N_F}) \tag{4-181}$$

で定義すれば，式 (4-153) によって

$$\widehat{\eta}_n|\boldsymbol{\eta}\rangle = \eta_n|\boldsymbol{\eta}\rangle, \quad \widehat{\rho}_n|\boldsymbol{\rho}\rangle = \rho_n|\boldsymbol{\rho}\rangle \qquad (n = 1 \sim N_F) \tag{4-182}$$

が成立するから[2]，$|\boldsymbol{\eta}\rangle$ は $\widehat{\eta}$ の同時固有ケットであり，$|\boldsymbol{\rho}\rangle$ は $\widehat{\rho}$ の同時固有ケットである．更には，定義式 (4-181) から直接に確認できるように

---

1) Bose 系では適当な関数空間を状態空間とした場合に $\widehat{q}_n = q_n\widehat{I}$，$\widehat{p}_n = -i\partial/\partial q_n$ と表現できる．運動量作用素の符号が式 (4-178) と異なる点に注意しよう．

2) $\widehat{\rho}_n \exp(i\rho_n\xi_n) = (i\partial/\partial\xi_n)\exp(\xi_n(-i\rho_n)) = i(-i\rho_n)\exp(\xi_n(-i\rho_n)) = \rho_n\exp(i\rho_n\xi_n)$ に注意．

$$\zeta|\boldsymbol{\eta}\rangle = (-1)^{N_F}|\boldsymbol{\eta}\rangle\zeta, \quad \zeta|\boldsymbol{\rho}\rangle = |\boldsymbol{\rho}\rangle\zeta \qquad (\zeta \in K_N^*) \tag{4-183}$$

が成立する．つまり，$|\boldsymbol{\rho}\rangle$ は全ての e 数と可換であり，$|\boldsymbol{\eta}\rangle$ は N_F の偶奇に応じて Grassmann 偶，あるいは Grassmann 奇である．ところで，Hermite 作用素 $\widehat{\eta}_n$ の固有値 η_n は実 a 数，反 Hermite 作用素 $\widehat{\rho}_n$ の固有値 ρ_n は純虚数的 a 数だと考えられるので，式 (4-181) に登場する $\{\eta_n\}$，$\{\rho_n\}$ としては

$$(\eta_n)^* = \eta_n, \quad (\rho_n)^* = -\rho_n \qquad (n = 1 \sim N_F) \tag{4-184}$$

を満足する a 数に限定しておこう．

今度は α を a 数として作用素 $\widehat{\rho}_n$ の指数関数 $\exp(i\alpha\widehat{\rho}_n)$ を考えよう．式 (4-174)，(4-179) によれば

$$\begin{aligned}[\widehat{\eta}_m, \exp(i\alpha\widehat{\rho}_n)] &= [\widehat{\eta}_m, 1 + i\alpha\widehat{\rho}_n] = i[\widehat{\eta}_m, \alpha\widehat{\rho}_n] = i(\widehat{\eta}_m\alpha\widehat{\rho}_n - \alpha\widehat{\rho}_n\widehat{\eta}_m)\\ &= -i\alpha(\widehat{\eta}_m\widehat{\rho}_n + \widehat{\rho}_n\widehat{\eta}_m) = \delta_{mn}\alpha = \delta_{mn}\alpha(1 + i\alpha\widehat{\rho}_n)\\ &= \delta_{mn}\alpha\exp(i\alpha\widehat{\rho}_n) \end{aligned} \tag{4-185a}$$

が成立し，同様にして

$$[\widehat{\rho}_m, \exp(i\alpha\widehat{\eta}_n)] = \delta_{mn}\alpha\exp(i\alpha\widehat{\eta}_n) \tag{4-185b}$$

が結論される．それゆえ，式 (1-33) から 式 (1-37)，(1-38) が導かれたように，式 (4-185) からは

$$|\boldsymbol{\eta}\rangle = K_\eta\exp(i\boldsymbol{\eta}\cdot\widehat{\boldsymbol{\rho}})|\mathbf{0}\rangle_\eta, \quad |\boldsymbol{\rho}\rangle = K_\rho\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\widehat{\boldsymbol{\eta}})|\mathbf{0}\rangle_\rho \tag{4-186}$$

が導かれる．空間 $V_G^{N_F}$ が不定計量であるため係数 K_η，K_ρ を規格化条件によって決定することはできないが，$|\boldsymbol{\eta}\rangle, |\boldsymbol{\rho}\rangle$ を式 (4-181) のように選んだ場合には $K_\eta = K_\rho = 1$ となることが直接の計算によって確かめられる．

前述のように $|\boldsymbol{\rho}\rangle$ は常に Grassmann 偶であるが，その Hermite 共役 $\langle\boldsymbol{\rho}|$ は N_F の偶奇に応じて Grassmann 偶，あるいは Grassmann 奇である．なぜなら $\langle\boldsymbol{\rho}| \equiv (|\boldsymbol{\rho}\rangle, .)$ は式 (4-155) の内積を使って定義され，その内積は N_F 個の a 数の積 $d\boldsymbol{\xi}$ を含むからである．同じ理由から $\langle\boldsymbol{\eta}|$ は常に Grassmann 偶であることが結論される．

さて，式 (4-94) の結果を繰返し適用すれば，$V_G^{N_F}$ の任意の元 f に対して

$$f(\boldsymbol{\xi}_0) = \int d\boldsymbol{\xi}\{\delta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0)\}^* f(\boldsymbol{\xi}) \tag{4-187}$$

が成立することが示され[1]，f をケット $|f\rangle$ で表せば

$$\langle \boldsymbol{\eta}|f\rangle = (|\boldsymbol{\eta}\rangle, |f\rangle) = \int d\boldsymbol{\xi}\{\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\}^* f(\boldsymbol{\xi}) = f(\boldsymbol{\eta}) \tag{4-188}$$

が結論される．従って，任意の $\boldsymbol{\eta}$ に対して $\langle \boldsymbol{\eta}|f\rangle = \langle \boldsymbol{\eta}|g\rangle$ ならば $|f\rangle = |g\rangle$ でなければならない．また，特に $|f\rangle = |\boldsymbol{\eta}'\rangle$ の場合には

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}'\rangle &= (|\boldsymbol{\eta}\rangle, |\boldsymbol{\eta}'\rangle) = \int d\boldsymbol{\xi}\{\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})\}^* \delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}') \\ &= \delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}')\end{aligned} \tag{4-189}$$

を得る．式 (4-183)，(4-188)，(4-189) を使えば

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\eta}|\{\int d\boldsymbol{\eta}'|\boldsymbol{\eta}'\rangle\langle \boldsymbol{\eta}'|\}|f\rangle &= \int d\boldsymbol{\eta}'\langle \boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}'\rangle f(\boldsymbol{\eta}') = \int d\boldsymbol{\eta}'\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}')f(\boldsymbol{\eta}') \\ &= (-1)^{N_F(N_F+1)/2}\int d\boldsymbol{\eta}'\{\delta(\boldsymbol{\eta}'-\boldsymbol{\eta})\}^* f(\boldsymbol{\eta}') \\ &= (-1)^{N_F(N_F+1)/2}\langle \boldsymbol{\eta}|f\rangle\end{aligned}$$

を得るから上述の理由によって

$$\{\int d\boldsymbol{\eta}'|\boldsymbol{\eta}'\rangle\langle \boldsymbol{\eta}'|\}|f\rangle = i^{N_F(N_F+1)}|f\rangle$$

であるが，これが任意の $|f\rangle \in V_G^{N_F}$ に対して成立することから

$$\int d\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}\rangle\langle \boldsymbol{\eta}| = i^{N_F(N_F+1)}\widehat{I} \tag{4-190}$$

が結論される．同様にして

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\rho}\rangle &= \exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\eta}) \\ \langle \boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\eta}\rangle &= i^{N_F(N_F-1)}\{\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\eta})\}^* = i^{N_F(N_F-1)}\exp(-i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\eta}) \\ \langle \boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}'\rangle &= \int d\boldsymbol{\xi}\{\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\xi})\}^*\exp(i\boldsymbol{\rho}'\cdot\boldsymbol{\xi}) = i^{N_F}\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}') = \delta(i\boldsymbol{\rho}-i\boldsymbol{\rho}')\end{aligned} \tag{4-191}$$

が導かれる．また，任意の $|\boldsymbol{\eta}\rangle, |\boldsymbol{\eta}'\rangle$ に対して

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\eta}|\{\int d\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}\rangle\langle \boldsymbol{\rho}|\}|\boldsymbol{\eta}'\rangle &= \int d\boldsymbol{\rho}\langle \boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\rho}\rangle\langle \boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\eta}'\rangle = i^{N_F(N_F-1)}\int d\boldsymbol{\rho}e^{i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\eta}}e^{-i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\eta}'} \\ &= i^{N_F(N_F-1)}i^{N_F}\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}') = i^{N_F^2}\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}')\end{aligned}$$

---

1) $\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_0)$ は実 a 数の積だから，複素共役演算は積の順序を変える効果だけを持つ点に注意．

が成立することから，式 (4-190) に対応して

$$\int d\boldsymbol{\rho}|\boldsymbol{\rho}\rangle\langle\boldsymbol{\rho}| = i^{N_F^2}\widehat{I} \tag{4-192}$$

が結論される．

4-6 Fermi 系の経路積分

これまでの議論から明らかなように，古典論と量子論の対応関係は Fermi 系でも Bose 系でも大きな違いはない．従って，Fermi 系における時間発展 Green 関数や生成汎関数の経路積分表式などを得るには，Bose 系に関する 1 章から 3 章までの議論を繰り返せばよい．以下にその概略を示そう．

まず，式 (1-81) と同様に，量子系の Hamiltonian $\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)$ の Weyl 変換を

$$\begin{aligned} H_W(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},t) &= W[\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)] \\ &\equiv \int d\boldsymbol{v}\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v})\langle\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}/2\rangle \end{aligned} \tag{4-193}$$

で定義する．$\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{v}$ は全て a 数である．ここで変数変換 $\boldsymbol{v}\to-\boldsymbol{v}'$ を行なえば

$$H_W(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},t) = (-1)^{N_F}\int d\boldsymbol{v}'\exp(-i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v}')\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}'/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}'/2\rangle$$

となるが[1]，これに $\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v})$ を乗じて $\boldsymbol{\rho}$ で積分すれば

$$\begin{aligned} &\int d\boldsymbol{\rho}\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v})H_W(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},t) \\ &= \int d\boldsymbol{v}'\left\{\int d\boldsymbol{\rho}\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'))\right\}\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}'/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}'/2\rangle \\ &= i^{N_F}\int d\boldsymbol{v}'\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}'/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}'/2\rangle \\ &= i^{N_F}(-1)^{N_F(N_F+1)/2}\int d\boldsymbol{v}'\{\delta(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v})\}^*\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}'/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}'/2\rangle \\ &= i^{N_F}(-1)^{-N_F(N_F+1)/2}\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}/2\rangle \end{aligned}$$

を得る．$\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v})$ は全ての a 数と可換であり，$d\boldsymbol{\rho}d\boldsymbol{v}' = (-1)^{N_F}d\boldsymbol{v}'d\boldsymbol{\rho}$ となる点に注意しよう．従って，$i^{N_F}(-1)^{-N_F(N_F+1)/2} = i^{-N_F^2}$ を使えば

$$\langle\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{v}/2|\widehat{H}(\widehat{\boldsymbol{\eta}},\widehat{\boldsymbol{\rho}},t)|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{v}/2\rangle = i^{N_F^2}\int d\boldsymbol{\rho}\exp(i\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{v})H_W(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},t) \tag{4-194}$$

---

1) a 数の N_F 変数関数 $f(\boldsymbol{\xi})$ の N_F 重積分では $\int d\boldsymbol{\xi}f(\boldsymbol{\xi}) = (-1)^{N_F}\int d\boldsymbol{\xi}f(-\boldsymbol{\xi})$ となる点に注意．一方，c 数の N_F 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の積分では上限と下限が入れ替わるために $\int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{x}f(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{\infty}d\boldsymbol{x}f(-\boldsymbol{x})$ となる．

と書ける．ここで，変数変換

$$\begin{cases} \eta + v/2 = \eta_f \\ \eta - v/2 = \eta_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \eta = (\eta_f + \eta_i)/2 = \overline{\eta} \\ v = \eta_f - \eta_i \end{cases} \tag{4-195}$$

を行なえば，式(4-194)は

$$\langle \eta_f | \widehat{H}(\widehat{\eta}, \widehat{\rho}, t) | \eta_i \rangle = i^{N_F^2} \int d\rho \exp(i\rho \cdot (\eta_f - \eta_i)) H_W(\overline{\eta}, \rho, t) \tag{4-196}$$

と表現できる．これが式(1-83)に対応することは言うまでもない．

ところで，Bose系では $H_W(q, p, t)$ と $\widehat{H}(\widehat{q}, \widehat{p}, t)$ とが同じ関数形を持つという条件でWeyl順序が定義されたが，絶対値1の定数因子を別にすればFermi系でも同様の議論が可能である．まず，α_n，β_n を実 a 数とすれば式(1-90)に対応して

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha_n\widehat{\eta}_n + \beta_n\widehat{\rho}_n) &= 1 + \alpha_n\widehat{\eta}_n + \beta_n\widehat{\rho}_n + (1/2)(\alpha_n\widehat{\eta}_n\beta_n\widehat{\rho}_n + \beta_n\widehat{\rho}_n\alpha_n\widehat{\eta}_n) \\
&= 1 + \alpha_n\widehat{\eta}_n + \beta_n\widehat{\rho}_n + (-1/2)\alpha_n\beta_n(\widehat{\eta}_n\widehat{\rho}_n - \widehat{\rho}_n\widehat{\eta}_n) \\
&= 1 + \alpha_n\widehat{\eta}_n + \beta_n\widehat{\rho}_n - \alpha_n\beta_n\widehat{\eta}_n\widehat{\rho}_n + i\alpha_n\beta_n/2 \\
&= (1 + i\alpha_n\beta_n/2)(1 + \alpha_n\widehat{\eta}_n)(1 + \beta_n\widehat{\rho}_n) \\
&= \exp(i\alpha_n\beta_n/2)\exp(\alpha_n\widehat{\eta}_n)\exp(\beta_n\widehat{\rho}_n)
\end{aligned}$$

が成立し，これから

$$\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\boldsymbol{\rho}}) = \exp(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}/2)\exp(\boldsymbol{\alpha} \cdot \widehat{\boldsymbol{\eta}})\exp(\boldsymbol{\beta} \cdot \widehat{\boldsymbol{\rho}}) \tag{4-197}$$

が導かれる．$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ は a 数 $\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}_{n=1\sim N_F}$ を成分とする N_F 次元のベクトルである．一方，式(4-192)は

$$\widehat{I} = i^{-N_F^2} \int d\rho |\rho\rangle\langle\rho| \tag{4-198}$$

と書けるから

$$\begin{aligned}
\langle \eta - v/2 | e^{\alpha\cdot\hat{\eta}} e^{\beta\cdot\hat{\rho}} | \eta + v/2 \rangle &= i^{-N_F^2} \langle \eta - v/2 | e^{\alpha\cdot\hat{\eta}} \int d\rho' |\rho'\rangle\langle\rho'| e^{\beta\cdot\hat{\rho}} | \eta + v/2 \rangle \\
&= i^{-N_F^2} \int d\rho' \langle \eta - v/2 | e^{\alpha\cdot\hat{\eta}} | \rho' \rangle \langle \rho' | e^{\beta\cdot\hat{\rho}} | \eta + v/2 \rangle \\
&= i^{-N_F^2} \int d\rho' \langle \eta - v/2 | e^{\alpha\cdot(\eta - v/2)} | \rho' \rangle \langle \rho' | e^{\beta\cdot\hat{\rho}} | \eta + v/2 \rangle \\
&= i^{-N_F^2} e^{\alpha\cdot(\eta - v/2)} \int d\rho' \langle \eta - v/2 | \rho' \rangle \langle \rho' | \eta + v/2 \rangle e^{\beta\cdot\rho'} \\
&= i^{-N_F^2} e^{\alpha\cdot(\eta - v/2)} \int d\rho' e^{i\rho'\cdot(\eta - v/2)} i^{N_F(N_F - 1)} e^{-i\rho'\cdot(\eta + v/2)} e^{-\rho'\cdot\beta}
\end{aligned}$$

$$= i^{-N_F} e^{\alpha\cdot(\eta - v/2)} \int d\rho' e^{-i\rho'\cdot(v - i\beta)} = (-1)^{N_F} e^{\alpha\cdot(\eta-v/2)} \delta(v - i\beta)$$

を得るそれゆえ，$e^{\alpha\cdot\hat{\eta}+\beta\cdot\hat{\rho}}$ のWeyl変換は

$$\begin{aligned}
&W[e^{\alpha\cdot\hat{\eta}+\beta\hat{\rho}}] \\
&= e^{i\alpha\cdot\beta/2} W[e^{\alpha\cdot\hat{\eta}} e^{\beta\cdot\hat{\rho}}] = e^{i\alpha\cdot\beta/2} \int dv e^{i\rho\cdot v} \langle \eta - v/2 | e^{\alpha\cdot\hat{\eta}} e^{\beta\cdot\hat{\rho}} | \eta + v/2 \rangle \\
&= (-1)^{N_F} e^{i\alpha\cdot\beta/2} \int dv e^{i\rho\cdot v} e^{\alpha\cdot(\eta - v/2)} \delta(v - i\beta) \\
&= (-1)^{N_F} e^{i\alpha\cdot\beta/2} e^{\alpha\cdot\eta} \int dv e^{v\cdot(\alpha/2 - i\rho)} \delta(v - i\beta) \\
&= (-1)^{N_F} e^{i\alpha\cdot\beta/2} e^{\alpha\cdot\eta} (-1)^{N_F(N_F-1)/2} e^{-(\alpha/2 - i\rho)\cdot i\beta} \\
&= (-1)^{N_F(N_F+1)/2} e^{\alpha\cdot\eta} e^{\beta\cdot\rho}
\end{aligned}$$

すなわち

$$W[\exp(\alpha\cdot\hat{\eta} + \beta\cdot\hat{\rho})] = i^{N_F(N_F+1)} \exp(\alpha\cdot\eta + \beta\cdot\rho) \tag{4-199}$$

となる．つまり，絶対値1の定数因子を別にすれば，$e^{\alpha\cdot\hat{\eta}+\beta\cdot\hat{\rho}}$ はWeyl変換で関数形を変えない．また，$dve^{i\rho\cdot v}\langle\eta - v/2|$ は N_F の偶奇に応じてGrassmann偶奇となるから，$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}_{n=1\sim N_F}$ に関する微分はWeyl変換との交換において

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha_{m_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\alpha_{m_M}} \frac{\partial}{\partial\beta_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\beta_{n_N}} W[e^{\alpha\cdot\hat{\eta}+\beta\cdot\hat{\rho}}] \\
&= (-1)^{N_F(M+N)} W\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_{m_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\alpha_{m_M}} \frac{\partial}{\partial\beta_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\beta_{n_N}} e^{\alpha\cdot\hat{\eta}+\beta\cdot\hat{\rho}}\right]
\end{aligned} \tag{4-200}$$

となる．それゆえ，作用素 $\{\hat{\eta}_n\},\{\hat{\rho}_n\}_{n=1\sim N_F}$ の単項式のWeyl順序を

$$\begin{aligned}
&\{\hat{\eta}_{m_1} \cdots \hat{\eta}_{m_M} \hat{\rho}_{n_1} \cdots \hat{\rho}_{n_N}\}_W \\
&\equiv (-1)^{N_F(M+N)} \frac{\partial}{\partial\alpha_{m_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\alpha_{m_M}} \frac{\partial}{\partial\beta_{n_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial\beta_{n_N}} \exp(\alpha\cdot\hat{\eta} + \beta\cdot\hat{\rho})\bigg|_{\alpha=0,\beta=0}
\end{aligned} \tag{4-201}$$

で定義すれば，

$$W[\{\hat{\eta}_{m_1} \cdots \hat{\eta}_{m_M} \hat{\rho}_{n_1} \cdots \hat{\rho}_{n_N}\}_W] = i^{N_F(N_F+1)} \eta_{m_1} \cdots \eta_{m_M} \rho_{n_1} \cdots \rho_{n_N} \tag{4-202}$$

を得る．これらの作用素単項式の線形結合で表されるHamiltonianは「Weyl順序に

ある」と言われるが，そのようなHamiltonianを $\widehat{H}(\widehat{\eta},\widehat{\rho},t)$ とすれば

$$H_W(\eta,\rho,t)=i^{N_F(N_F+1)}H(\eta,\rho,t)=i^{-N_F^2}i^{-N_F}H(\eta,\rho,t) \tag{4-203}$$

が成立し，式(4－196)は以下のように表現できる．

$$\langle\eta_f|\widehat{H}(\widehat{\eta},\widehat{\rho},t)|\eta_i\rangle=i^{-N_F}\int d\rho e^{i\rho\cdot(\eta_f-\eta_i)}H(\overline{\eta},\rho,t) \tag{4-204}$$

さて，式(1－46)と式(4－175)を比べてみれば分かるように，物理量 $\widehat{F}$ の時間発展を規定するHeisenbergの運動方程式はFermi系でもBose系でも全く同じである．それゆえ，基底遷移作用素 $\widehat{\Phi}(t,t_0)$ はFermi系でも式(1－51)と同じく

$$\widehat{\Phi}(t,t_0)=T\left[\exp\left(i\int_{t_0}^{t}d\tau\widehat{H}(\tau)\right)\right],\quad \widehat{H}(t)=\widehat{H}(\widehat{\eta}(t),\widehat{\rho}(t),t) \tag{4-205}$$

として与えられ，時間発展Green関数は式(2－1)と同じく

$$G(\eta,t;\eta',t')=\langle\eta,t|\eta',t'\rangle=\langle\eta,t_0|\widehat{\Phi}(t_0,t)\widehat{\Phi}(t',t_0)|\eta',t_0\rangle \tag{4-206}$$

と表現できる．また，式(4－190)を使えば

$$\begin{aligned}&G(\eta,t;\eta',t')\\&\quad=\langle\eta,t|\eta',t'\rangle=i^{N_F(N_F+1)}\int_d\eta''\langle\eta,t|\eta'',t''\rangle\langle\eta'',t''|\eta',t'\rangle\\&\quad=i^{N_F(N_F+1)}\int d\eta''G(\eta,t;\eta'',t'')G(\eta'',t'',\eta',t')\end{aligned} \tag{4-207}$$

を得る．ところで，$\langle\eta,t|$ はGrassmann偶だから時間発展Green関数は $|\eta,t\rangle$ と同じ偶奇性 (N_F の偶・奇に応じてGrassmann偶・奇) を持つ点に注意しよう．また，HamiltonianがGrassmann偶ならば基底遷移作用素もまたGrassmann偶である．以下，HamiltonianがGrassmann偶だとして議論を進める．

2–2節と同様に時間区間 $[t_I,t_F]$ 内にサンプル時刻 $t_1,t_2,\cdots,t_{R-1}$ を設定して

$$G_r\equiv(\eta_{r+1},t_{r+1};\eta_r,t_r) \tag{4-208}$$

を定義し，$t_R=t_F$，$t_0\equiv t_I$ として式(4－207)を繰り返し適用すれば

$$\begin{aligned}&G(\eta_F,t_f;\eta_I,t_I)\\&\quad=i^{N_F(N_F+1)(R-1)}\int\left(\prod_{r=1}^{R-1}d\eta_r\right)\left(\prod_{r=R-1}^{1}G_r\right)G(\eta_1,t_1;\eta_I,t_I)\\&\quad=i^{N_F(N_F+1)(R-1)}\int d\eta_0\{\delta(\eta_0-\eta_I)\}^*\end{aligned}$$

$$\times \int \left(\prod_{r=1}^{R-1} d\boldsymbol{\eta}_r \right) \left(\prod_{r=R-1}^{1} G_r \right) G(\boldsymbol{\eta}_1, t_1; \boldsymbol{\eta}_0, t_0)$$

$$= i^{N_F\{(N_F+1)(R-1)+2\}} \int \left(\prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{\eta}_r \right) \left(\prod_{r=R-1}^{0} G_r \right) \{\delta(\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}_I)\}^* \tag{4-209}$$

を得る．$(\prod_{r=1}^{R-1} d\boldsymbol{\eta}_r)(\prod_{r=R-1}^{1} G_r)$ は Grassmann 偶だから $\{\delta(\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}_I)\}^*$ と G_0 との交換だけが符号因子 $(-1)^{N_F}$ を与える点に注意しよう．ただし，積分の順序は

$$\left(\prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{\eta}_r \right) \left(\prod_{r=R-1}^{0} G_r \right) = d\boldsymbol{\eta}_0 d\boldsymbol{\eta}_1 \cdots d\boldsymbol{\eta}_{R-1} G_{R-1} G_{R-2} \cdots G_0 \tag{4-210}$$

である．Bose 系の場合と同様に，式 (4-209) において時間刻み $\varepsilon_r \equiv t_{r+1} - t_r$ の最大値が零となるように R を無限大とすれば Fermi 系の経路積分を得る．

さて，式 (4-204) を使えば，式 (2-14) と同様に

$$G_r \equiv G(\boldsymbol{\eta}_{r+1}, t_{r+1}; \boldsymbol{\eta}_r, t_r) = \langle \boldsymbol{\eta}_{r+1}, t_r | \{\hat{I} - i\varepsilon_r \hat{H}(t_r)\} | \boldsymbol{\eta}_r, t_r \rangle$$

$$= \delta(\boldsymbol{\eta}_{r+1} - \boldsymbol{\eta}_r) - i\varepsilon_r \langle \boldsymbol{\eta}_{r+1}, t_r | \hat{H}(t_r) | \boldsymbol{\eta}_r, t_r \rangle$$

$$= i^{-N_F} \int d\boldsymbol{\rho}_r \exp\{i\boldsymbol{\rho}_r \cdot (\boldsymbol{\eta}_{r+1} - \boldsymbol{\eta}_r)\}\{1 - i\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{\eta}}_r, \boldsymbol{\rho}_r, t_r)\}$$

$$\cong i^{-N_F} \int d\boldsymbol{\rho}_r \exp\{i\boldsymbol{\rho}_r \cdot (\boldsymbol{\eta}_{r+1} - \boldsymbol{\eta}_r) - i\varepsilon_r H(\overline{\boldsymbol{\eta}}_r, \boldsymbol{\rho}_r, t_r)\} \tag{4-211}$$

と変形できる．ただし，

$$\overline{\boldsymbol{\eta}}_r \equiv (\boldsymbol{\eta}_{r+1} + \boldsymbol{\eta}_r)/2 \tag{4-212}$$

である．これを式 (4-209) に代入し，

$$d\boldsymbol{\eta}_0 d\boldsymbol{\eta}_1 \cdots d\boldsymbol{\eta}_{R-1} d\boldsymbol{\rho}_{R-1} d\boldsymbol{\rho}_{R-2} \cdots d\boldsymbol{\rho}_0$$

$$= d\boldsymbol{\eta}_0 d\boldsymbol{\rho}_0 d\boldsymbol{\eta}_1 d\boldsymbol{\rho}_1 \cdots d\boldsymbol{\eta}_{R-1} d\boldsymbol{\rho}_{R-1} = \prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{\eta}_r d\boldsymbol{\rho}_r$$

に注意すれば

$$G(\boldsymbol{\eta}_F, t_F; \boldsymbol{\eta}_I, t_I)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \theta_{R,N_F} \int \left\{ \prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{\eta}_r d\boldsymbol{\rho}_r \right\} \exp\left(i \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \tilde{L}_r \right) \{\delta(\boldsymbol{\eta}_0 - \boldsymbol{\eta}_I)\}^* \tag{4-213}$$

を得る．ただし θ_{R,N_F} は絶対値 1 の因子であり

$$\theta_{R,N_F} \equiv i^{\{N_F(N_F(R-1)+1\}} \tag{4-214}$$

として定義される．また，$\tilde{L}_r$ は式 (2-17) に対応して

$$\tilde{L}_r \equiv \boldsymbol{\rho}_r \cdot (\boldsymbol{\eta}_{r+1} - \boldsymbol{\eta}_r)/\varepsilon_r - H(\overline{\boldsymbol{\eta}}_r, \boldsymbol{\rho}_r, t_r) \tag{4-215}$$

と定義され，$R \to \infty$ の極限では

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \tilde{L}_r = \tilde{A}[\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\rho}] \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt \{\boldsymbol{\rho}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) - H(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\rho}(t), t)\} \tag{4-216}$$

となることから，式 (4-213) を

$$G(\boldsymbol{\eta}_F, t_F; \boldsymbol{\eta}_I, t_I) = \int \mathfrak{D}\boldsymbol{\eta}\mathfrak{D}\boldsymbol{\rho} \exp\left(i\int_{t_I}^{t_F} dt\{\boldsymbol{\rho}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) - H(\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\rho}(t), t)\}\right) \tag{4-217}$$

と記すことにする．これが Fermi 系の時間発展 Green 関数に対する経路積分表式である．

以上は一般論だが，問題によっては別の形式で扱った方が便利な場合もある．例えば 4–4 節で紹介した調和振動子に上述の手法を適用しようとすれば実 a 数の正準変数 $\eta_1, \eta_2, \rho_1, \rho_2$ の間に式 (4-135) の拘束条件を考慮しなければならず，特別な工夫が必要となるが[1]，複素 a 数 $\eta_1 \pm i\eta_2$ を一般化座標とする式 (4-140) の Lagrangian を採用すれば形式上は一組の正準変数 η，ρ で記述される非拘束系となり，扱いは大いに簡素化されるのである．以下にその概要を示そう．

Bose 系の調和振動子が $\widehat{q}$，$\widehat{p}$ の代わりに消滅作用素 $\widehat{a} \equiv (\widehat{q} + i\widehat{p})/\sqrt{2}$ と生成作用素 $\widehat{a}^\dagger$ を使って量子化できることに対応し，Fermi 系でも

$$\widehat{\psi} \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\eta}_1 - i\widehat{\rho}_1) + i\frac{1}{2}(\widehat{\eta}_2 - i\widehat{\rho}_2), \quad \widehat{\psi}^\dagger = \frac{1}{2}(\widehat{\eta}_1 - i\widehat{\rho}_1) - i\frac{1}{2}(\widehat{\eta}_2 - i\widehat{\rho}_2) \tag{4-218}$$

を考えよう ($\widehat{\rho}_1$，$\widehat{\rho}_2$ が反 Hermite である点に注意)．式 (4-174) の反交換関係から

$$\{\widehat{\psi}, \widehat{\psi}^\dagger\} = 1, \quad \{\widehat{\psi}, \widehat{\psi}\} = \{\widehat{\psi}^\dagger, \widehat{\psi}^\dagger\} = 0 \tag{4-219}$$

が導かれるが，この性質から $\widehat{\psi}$ に正準共役な運動量作用素が $\widehat{\varphi} \equiv i\widehat{\psi}^\dagger$ として与えられ，式 (4-142) の古典系 Hamiltonian に対応して

1) 拘束系の経路積分表現に関しては 5–8 節参照のこと

$$\widehat{H} = -i\omega\widehat{\varphi}\widehat{\psi} = \omega\widehat{\psi}^{\dagger}\widehat{\psi} \tag{4-220}$$

を量子系の Hamiltonian とすべきことが分かる[1]．実際，式 (4－175) は

$$\frac{d}{dt}\widehat{\psi} = i^{-1}[\widehat{\psi}, \widehat{H}] = -i\omega\widehat{\psi}, \quad \frac{d}{dt}\widehat{\psi}^{\dagger} = i^{-1}[\widehat{\psi}^{\dagger}, \widehat{H}] = i\omega\widehat{\psi}^{\dagger} \tag{4-221}$$

となり，確かに調和振動子の運動方程式を与える．

さて，状態空間として V_G^2 (二つの実 a 数の組を一つの e 数に対応させる写像の集合) を選び，$\{\widehat{\eta}_n\}$，$\{\widehat{\rho}_n\}$ に対する式 (4－178) の表現を採用すれば，$\widehat{\psi}$，$\widehat{\psi}^{\dagger}$ は

$$\widehat{\psi} = \frac{1}{2}\xi\widehat{I} + \frac{\partial}{\partial\xi^*}, \quad \widehat{\psi}^{\dagger} = \frac{1}{2}\xi^*\widehat{I} + \frac{\partial}{\partial\xi} \tag{4-222}$$

と表現できることが分かる．ただし，

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 + i\xi_2 \\ \xi^* = \xi_1 - i\xi_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = (1/2)(\xi + \xi^*) \\ \xi_2 = (1/2i)(\xi - \xi^*) \end{cases} \tag{4-223}$$

であり，これから

$$\frac{\partial}{\partial\xi^*} = \frac{\partial\xi_1}{\partial\xi^*}\frac{\partial}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\xi_2}{\partial\xi^*}\frac{\partial}{\partial\xi_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} - i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)$$

と書けることを利用した．また，式 (4－223) を使って (ξ_1, ξ_2) を (ξ, ξ^*) で表せば，V_G^2 の元 $|f\rangle$ は (ξ, ξ^*) の関数として $f(\xi, \xi^*)$ と表現できる．以後，この記法を採用する．

ここで，α を ξ_1, ξ_2 とは独立な実 a 数とし，V_G^2 の元 $|0\rangle, |1\rangle$ を

$$|0\rangle \equiv 1 + \alpha\xi + \xi\xi^*/2, \quad |1\rangle \equiv \widehat{\psi}^{\dagger}|0\rangle = -\alpha + \xi^* + \alpha\xi\xi^*/2 \tag{4-224}$$

として定義しよう[2]．$|0\rangle$ は Grassmann 偶，$|1\rangle$ は Grassmann 奇である．また

$$\widehat{\psi}|0\rangle = 0, \quad \widehat{\psi}^{\dagger}|0\rangle = |1\rangle, \quad \widehat{\psi}|1\rangle = |0\rangle, \quad \widehat{\psi}^{\dagger}|1\rangle = 0$$

が成立するから，個数作用素 $\widehat{N}$ を

$$\widehat{N} = \widehat{\psi}^{\dagger}\widehat{\psi} \tag{4-225}$$

で定義すれば $\widehat{H} = \omega\widehat{N}$ であり，

$$\widehat{N}|0\rangle = 0, \quad \widehat{N}|1\rangle = |1\rangle \quad \rightarrow \quad \widehat{H}|0\rangle = 0 \cdot \omega|0\rangle, \quad \widehat{H}|1\rangle = 1 \cdot \omega|1\rangle \tag{4-226}$$

---

1) 式 (4－142) の η に対応するのが $\widehat{\eta} \equiv \widehat{\eta}_1 + i\widehat{\eta}_2$ ではなく $\widehat{\psi}$ である点に注意しよう．また，Bose 系の調和振動子の Hamiltonian が生成消滅作用素を使って $\widehat{H} = \omega a^{\dagger}a$ と書ける点にも注意して欲しい．

2) 同じ記号を使ってはいるが，式 (4－170) に登場する $|0\rangle, |1\rangle$ とは全く別物である点に注意する必要がある．式 (4－170) では $|0\rangle, |1\rangle$ は V_G^1 の元であり，$|0\rangle \equiv 1$，$|1\rangle \equiv \xi$ として定義される．

が結論される．それゆえ，$|0\rangle, |1\rangle$ はエネルギー量子 ω が0個，及び1個の場合のエネルギー固有状態を表しており，$\hat{\psi}^\dagger$，$\hat{\psi}$ は生成・消滅作用素であると解釈できる．ところで，二つのe数 f_1，f_2 を使って

$$|f\rangle = |0\rangle f_1 + |1\rangle f_2 = f_1|0\rangle + (f_2)_d|1\rangle \tag{4-227}$$

と表現される V_G^2 の元の集合を S_P とすれば，S_P は和とe数倍に関して閉じているからG-ベクトル空間である(S_P は V_G^2 の部分空間)．V_G^2 は4個の元 $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1\xi_2\}$ で張られる4次元のG-ベクトル空間だが，S_P の次元は2である．式(4-225)の上の式から分かるように $\hat{\psi}^\dagger$，$\hat{\psi}$ は S_P の元を S_P の元に写すから，物理的に意味を持つのは S_P だけであり，V_G^2 全体ではない．

さて，V_G^2 上の内積としては式(4-155)ではなく，これに定数 $1/2i$ を乗じた

$$(f, g) \equiv (1/2i)\int d\xi_1 d\xi_2 f^* g = \int d\xi^* d\xi f^* g \tag{4-228}$$

を採用するのが便利である[1]．すると例えば

$$\langle 0|0\rangle \equiv (|0\rangle, |0\rangle) = \int d\xi^* d\xi (1 + \alpha\xi + \xi\xi^*/2)^* (1 + \alpha\xi + \xi\xi^*/2)$$

$$= \int d\xi^* d\xi (1 + \xi^*\alpha + \xi\xi^*/2)(1 + \alpha\xi + \xi\xi^*/2)$$

$$= \int d\xi^* d\xi (\xi\xi^*/2 + \xi\xi^*/2) = 1$$

であり，同様にして

$$\langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 0|1\rangle = 0, \quad \langle 1|0\rangle = 0, \quad \langle 1|1\rangle = 1 \tag{4-229}$$

が導かれるから $\{\langle 0|, \langle 1|\}$ は部分空間 S_P に関する $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ の双対基底を成し，

$$\langle 0^c| = |0\rangle^\dagger = \langle 0|, \quad \langle 1^c| = |1\rangle^\dagger = \langle 1| \tag{4-230}$$

が成立する．内積を式(4-228)のように選んだ理由はここにある．S_P の任意の元 $|f\rangle$ は式(4-227)のように展開されるので

$$(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)|f\rangle$$

---

1) 積分変数の変換に関しては式(4-81)，(4-84)を使っても良いが，積分と微分が同じことに注意すれば次のようにしても導出できる．

$$\int d\xi^* d\xi = \frac{\partial}{\partial\xi^*}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} + i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} - i\frac{\partial}{\partial\xi_2}\right) = \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{\partial}{\partial\xi_2} = \frac{1}{2i}\int d\xi_1 d\xi_2$$

$$= (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)(|0\rangle f_1 + |1\rangle f_2) = |0\rangle f_1 + |1\rangle f_2 = |f\rangle$$

が成立し，従って

$$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \widehat{I} \qquad (S_P \text{ 上で}) \tag{4-231}$$

が言える．一方，ψ を複素 a 数として

$$|\psi\rangle \equiv \exp(-\psi\widehat{\psi}^\dagger)|0\rangle = (1-\psi\widehat{\psi}^\dagger)|0\rangle = |0\rangle - \psi|1\rangle = |0\rangle + |1\rangle\psi \tag{4-232}$$

を定義すれば

$$\widehat{\psi}|\psi\rangle = \widehat{\psi}|0\rangle - \widehat{\psi}\psi|1\rangle = \psi\widehat{\psi}|1\rangle = \psi|0\rangle = \psi(|0\rangle - \psi|1\rangle) = \psi|\psi\rangle \tag{4-233}$$

が成立するから $|\psi\rangle$ は消滅作用素 $\widehat{\psi}$ の固有ケットであり，Bose 系の場合と同様にコヒーレント状態と呼ばれる[1]．また，式 (4-229) によって

$$\langle\psi|\psi'\rangle = (\langle 0| + \psi^*\langle 1|)(|0\rangle + |1\rangle\psi') = 1 + \psi^*\psi' = \exp(\psi^*\psi') \tag{4-234}$$

を得る．更には

$$\begin{aligned}
&\int d\psi^* d\psi \exp(\psi\psi^*)|\psi\rangle\langle\psi| \\
&\quad = \int d\psi^* d\psi (|0\rangle + |1\rangle\psi)(1+\psi\psi^*)(\langle 0| + \psi^*\langle 1|) \\
&\quad = |0\rangle \int d\psi^* d\psi (1+\psi\psi^*)\langle 0| + |0\rangle \int d\psi^* d\psi \psi^* \langle 1| \\
&\qquad + |1\rangle \int d\psi^* d\psi \psi \langle 0| + |1\rangle \int d\psi^* d\psi \psi\psi^* \langle 1| = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|
\end{aligned}$$

が導かれ，式 (4-231) によれば

$$\int d\psi^* d\psi e^{\psi\psi^*}|\psi\rangle\langle\psi| = \int d\psi^* d\psi |\psi\rangle e^{\psi\psi^*}\langle\psi| = \widehat{I} \quad (S_P \text{ 上で}) \tag{4-235}$$

が結論される．

さて，調和振動子に限らず，Hamiltonian が生成・消滅作用素 $\widehat{\psi}^\dagger$，$\widehat{\psi}$ と時間 t の関数として与えられる系を考えよう[2]．この場合，Hamiltonian は

---

1) Bose 系のコヒーレント状態は $|a\rangle \equiv \exp(a\widehat{a}^\dagger)|0\rangle$ として定義され，$\widehat{a}|a\rangle = a|a\rangle$ を満足する．

2) このような系では $\widehat{H}$ は個数作用素 $\widehat{N}$ と簡単な比例関係になく，上述の $|0\rangle$，$|1\rangle$ はエネルギー固有状態とは限らない．

$$\widehat{H}(\widehat{\psi}^\dagger,\widehat{\psi},t)=H_{00}(t)+H_{10}(t)\widehat{\psi}^\dagger+H_{01}(t)\widehat{\psi}+H_{11}(t)\widehat{\psi}^\dagger\widehat{\psi} \tag{4-236}$$

と展開できるが，$\widehat{H}$ がGrassmann偶であることから H_{00}，H_{11} はGrassmann偶，H_{10}，H_{01} はGrassmann奇である．そして，$|\psi\rangle$ がGrassmann偶であることから

$$\begin{aligned}\langle\psi|\widehat{H}|\psi'\rangle&=H_{00}\langle\psi|\psi'\rangle+H_{10}\langle\psi|\widehat{\psi}^\dagger|\psi'\rangle+H_{01}\langle\psi|\widehat{\psi}|\psi'\rangle+H_{11}\langle\psi|\widehat{\psi}^\dagger\widehat{\psi}|\psi'\rangle\\&=(H_{00}+H_{10}\psi^*+H_{01}\psi'+H_{11}\psi^*\psi')e^{\psi^*\psi'}\\&=H(\psi^*,\psi',t)e^{\psi^*\psi'}\end{aligned} \tag{4-237}$$

が導かれる．ただし，$H(\psi^*,\psi',t)$ は $\widehat{H}(\widehat{\psi}^\dagger,\widehat{\psi},t)$ における $\widehat{\psi}^\dagger$，$\widehat{\psi}$ をそれぞれ ψ^*，ψ' で置き換えて得られる関数 (複素 a 数の対を e 数に写す関数) を意味する．

以上の結果を利用すれば時間発展Green関数の経路積分表式を得るのは容易である．まず，式(4-190)の代りに式(4-235)を使えば，式(4-207)に対応して

$$\begin{aligned}G(\psi,t;\psi',t')&=\langle\psi,t|\psi',t'\rangle\\&=(\langle\psi,t|\left\{\int d\psi''^*d\psi''|\psi'',t''\rangle e^{\psi''\psi''^*}\langle\psi'',t''|\right\}|\psi',t'\rangle\\&=\int d\psi''^*d\psi''G(\psi,t;\psi'',t'')e^{\psi''\psi''^*}G(\psi'',t'';\psi',t')\end{aligned} \tag{4-238}$$

が成立するが，時間区間 $[t_I,t_F]$ 内にサンプル時刻 $t_1,t_2,\cdots,t_{R-1}$ を設定して式(4-238)を繰り返し適用し，$t_R=t_F$，$t_0\equiv t_I$ とすれば，式(4-209)に対応して

$$\begin{aligned}&G(\psi_F,t_F;\psi_I,t_I)\\&=\int\left\{\prod_{r=1}^{R-1}d\psi_r^*d\psi_rG(\psi_{r+1},t_{r+1};\psi_r,t_r)e^{\psi_r\psi_r^*}\right\}G(\psi_1,t_1;\psi_I,t_I)\\&=e^{-\psi_R\psi_R^*}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}d\psi_r^*d\psi_rG(\psi_{r+1},t_{r+1};\psi_r,t_r)e^{\psi_{r+1}\psi_{r+1}^*}\right\}\delta_2(\psi_0-\psi_I)\\&\delta_2(\psi_0-\psi_I)\equiv\delta(\psi_0-\psi_I)\delta(\psi_0^*-\psi_I^*)\end{aligned} \tag{4-239}$$

を得る．ただし，時間発展Green関数がGrassmann偶であり

$$G(\psi_1,t_1;\psi_I,t_I)=\int d\psi_0^*d\psi_0G(\psi_1,t_1;\psi_0,t_0)\delta(\psi_0-\psi_I)\delta(\psi_0^*-\psi_I^*) \tag{4-240}$$

と書けることを利用した．また，後ほどの変形に備えて $e^{\psi_r\psi_r^*}$ の添字を一つずらし，

$e^{\psi_{r+1}\psi^*_{r+1}}$ を使って表現している．一方，式 (4-234)，(4-237) によって

$$G(\psi_{r+1},t_{r+1};\psi_r,t_r)=\langle\psi_{r+1},t_{r+1}|\psi_r,t_r\rangle=\langle\psi_{r+1},t_r|\widehat{\Phi}(t_{r+1},t_r)^\dagger|\psi_r,t_r\rangle$$
$$\cong\langle\psi_{r+1},t_r|\{\widehat{I}-i\varepsilon_r\widehat{H}(\widehat{\psi}^\dagger(t_r),\widehat{\psi}(t_r),t_r)\}|\psi_r,t_r\rangle$$
$$=e^{\psi^*_{r+1}\psi_r}-i\varepsilon_rH(\psi^*_{r+1},\psi_r,t_r)e^{\psi^*_{r+1}\psi_r}\cong e^{\psi^*_{r+1}\psi_r-i\varepsilon_rH(\psi^*_{r+1},\psi_r,t_r)}$$

が成立し，$\psi_R=\psi_F$ だから，式 (4-239) は

$$G(\psi_F,t_F;\psi_I,t_I)=e^{-\psi_R\psi^*_R}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}d\psi^*_rd\psi_r\exp(i\varepsilon_r\tilde{L}_r)\right\}\delta_2(\psi_0-\psi_I)$$
$$=e^{-\psi_R\psi^*_R}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}d\psi^*_rd\psi_r\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r\tilde{L}_r\right)\delta_2(\psi_0-\psi_I)$$
$$\tilde{L}_r\equiv i\psi^*_{r+1}(\psi_{r+1}-\psi_r)/\varepsilon_r-H(\psi^*_{r+1},\psi_r,t_r) \tag{4-241}$$

と書ける．ところが $R\to\infty$ では

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r\tilde{L}_r=A[\psi^*,\psi]\equiv\int_{t_I}^{t_F}dt\{i\psi^*(t)\dot{\psi}(t)-H(\psi^*(t),\psi(t),t)\} \tag{4-242}$$

が成立することから，式 (4-241) を形式的に

$$G(\psi_F,t_F;\psi_I,t_I)$$
$$=\int\mathfrak{D}\psi^*\mathfrak{D}\psi\exp\left[i\int_{t_I}^{t_F}dt\{i\psi^*(t)\dot{\psi}(t)-H(\psi^*(t),\psi(t),t)\}\right] \tag{4-243}$$

と表現することにする．

以上の議論を一般化し，複数の生成・消滅作用素 $\{\widehat{\psi}^\dagger_n,\widehat{\psi}_n\}_{n=1\sim N_F}$ で記述される系を扱うのは容易である．その結果，式 (4-241) に対応して

$$G(\boldsymbol{\Psi}_F,t_F;\boldsymbol{\Psi}_I,t_I)$$
$$=e^{-\boldsymbol{\Psi}_R\cdot\boldsymbol{\Psi}^*_R}\int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}d\boldsymbol{\Psi}^*_rd\boldsymbol{\Psi}_r\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r\tilde{L}_r\right)\delta_2(\boldsymbol{\Psi}_0-\boldsymbol{\Psi}_I)$$
$$\tilde{L}_r\equiv i\boldsymbol{\Psi}^*_{r+1}\cdot(\boldsymbol{\Psi}_{r+1}-\boldsymbol{\Psi}_r)/\varepsilon_r-H(\boldsymbol{\Psi}^*_{r+1},\boldsymbol{\Psi}_r,t_r) \tag{4-244}$$

が導かれる.ただし，$\boldsymbol{\Psi}^*_r$ と $\boldsymbol{\Psi}_r$ はそれぞれ時刻 t_r における $\{\psi^*_n\}_{n=1\sim N_F}$，$\{\psi_n\}_{n=1\sim N_F}$

を並べて作った N_F 次元ベクトルを意味し,

$$\delta_2(\boldsymbol{\Psi}_0 - \boldsymbol{\Psi}_I) \equiv \delta_2(\psi_{1,0} - \psi_{1,I})\delta_2(\psi_{2,0} - \psi_{2,I}) \cdots \delta_2(\psi_{N_F,0} - \psi_{N_F,I})$$
$$d\boldsymbol{\Psi}_r^* d\boldsymbol{\Psi}_r \equiv d\psi_{1,r}^* d\psi_{1,r} d\psi_{2,r}^* d\psi_{2,r} \cdots d\psi_{N_F,r}^* d\psi_{N_F,r} \qquad (4-245)$$

である. また, 式 (4-244) は $R \to \infty$ の極限では形式的に

$$G(\boldsymbol{\Psi}_F, t_F; \boldsymbol{\Psi}_I, t_I) = \int \mathfrak{D}\boldsymbol{\Psi}^* \mathfrak{D}\boldsymbol{\Psi} \exp\left[i \int_{t_I}^{t_F} dt \{ i\boldsymbol{\Psi}^*(t) \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}(t) - H(\boldsymbol{\Psi}^*(t), \boldsymbol{\Psi}(t), t) \} \right] \qquad (4-246)$$

と書かれる. これが時間発展 Green 関数に対する経路積分表式である.

演習問題

1. $(l_1, \cdots, l_R)$ が同じ数値を含まない場合, 式 (4-21) で定義される $\Psi_{l_1,\cdots,l_R}$ が式 (4-23b) のように表現できることを示せ.
2. 式 (4-54) で定義される $C(R_N^{*2})$ から C_N^* への写像 φ が可逆な線形写像であることを証明せよ.
3. 式 (4-151) を示せ.

第5章
拘　束　系

正準量子化では対応する古典系を正準形式で記述することが基本となる．古典的な正準変数間の Poisson 括弧を対応する作用素間の交換子に置き換えるのが正準量子化だからである．ところで，電磁場に代表されるゲージ場を正準形式で記述すれば必然的に拘束系となる．系の時間発展を確定するためにゲージを固定する必要があり，これが正準変数を拘束するからである．従って，ゲージ場の量子化に際しては拘束系の正準形式に関する理解が不可欠となる．ゲージ場は無限自由度の拘束系であるが，本章で詳細に検討する有限自由度の拘束系の単なる延長線上にあると考えて大きな間違いはない．

5-1　拘束系の一例

ここでは極めて簡単な系を題材とし，拘束系の基本的な性質について説明する．対象とするのは一様な重力場の中で鉛直な平面内を運動する粒子である．粒子の質量を m，重力加速度を g とし，鉛直下向きに x 軸を，水平方向に y 軸を設定すれば，粒子の運動はLagrangian

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx \tag{5-1}$$

によって記述される．何も拘束がなければ放物運動をするわけだが，粒子の運動が平面全体ではなく，平面内の曲線

$$F(x,y) = 0 \tag{5-2}$$

に制限されている場合はどうだろうか (例えば針金に沿って摩擦なしに運動するビーズを考えればよい)．仮に式(5-2)を満足する x，y が媒介変数 ρ によって

$$\left.\begin{aligned} x &= x(\rho) \\ y &= y(\rho) \end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

と表現できたとすれば Lagrangian は

$$L(\rho,\dot{\rho}) = \frac{m}{2}\{x'(\rho)^2 + y'(\rho)^2\}\dot{\rho}^2 + mgx(\rho) \tag{5-4}$$

となり，拘束条件に適合した必要最小限の変数 (この場合は1変数) を使って系の運動が記述されることになる．具体的にはEuler-Lagrange方程式

$$m\{x'(\rho)^2 + y'(\rho)^2\}\ddot{\rho} - m\{x'(\rho)x''(\rho) + y'(\rho)y''(\rho)\}\dot{\rho}^2 - mgx'(\rho) = 0 \tag{5-5}$$

を指定された初期条件の下に解けば良い．

ところが，拘束条件に適合した媒介変数表示がいつも可能であるとは限らず，可能な場合でも表示式が煩雑になってしまうこともある．むしろLagrangeの未定乗数法を利用し，Lagrangian として

$$L(x,y,\lambda,\dot{x},\dot{y},\dot{\lambda}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx + \lambda F(x,y) \tag{5-6}$$

を考えるのが自然である．この場合，未定乗数 λ は力学変数の一つと見なされ，系の運動は x，y 及び λ に関する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \to \quad m\ddot{x} - mg - \lambda F_x(x,y) = 0 \tag{5-7a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \to \quad m\ddot{y} - \lambda F_y(x,y) = 0 \tag{5-7b}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \to \quad F(x,y) = 0 \tag{5-7c}$$

によって記述される (F_x，F_y は x，y に関する F の偏導関数)．式(5-2)の拘束条件が λ に関する Euler-Lagrange 方程式から得られる点に注意しよう．また，式(5-7a)，(5-7b) に示されるように，$\lambda F_x(x,y)$，$\lambda F_y(x,y)$ は粒子を曲線上に留めるために作用する x，y 方向の「拘束力」を表す．

さて，拘束条件のない通常の系では Euler-Lagrange 方程式は各力学変数に関する2階の常微分方程式となるため，微分方程式の一般解が1変数当たり2個の積分定数を持つという意味で1変数当たりの自由度は2となる．それゆえ，3変数 x，y，λ を含む式(5-6)の Lagrangian は自由度6の系を表わすように思われるが，実際の自由度は以下に示すように2に過ぎない[1]．まず，λ に関する Euler-Lagrange 方程式(5-7c)は微分を含まず，自由度は生じない．一方，x，y に関する Euler-Lagrange 方程式

1) 式(5-7)が1本の曲線上に拘束された質点の運動を記述していることを考えれば当然である．

(5-7a), (5-7b) は2階の微分方程式だが，任意の時刻で $F(x(t), y(t)) = 0$ が成立することから初期条件に制限が生ずる．例えば $x(0)$ を指定すれば $F(x(0), y(0)) = 0$ から $y(0)$ が決まってしまう．また，$F(x(t), y(t))$ は時間の関数として恒等的に零だからその時間微分も零でなければならず

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = F_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + F_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0 \tag{5-8}$$

が任意の t に対して成立する．従って，例えば $x(0)$，$y(0)$，$\dot{x}(0)$ が与えられれば $\dot{y}(0)$ が決まってしまう．結局，初期条件として自由に選べるのは $x(0)$，$y(0)$，$\dot{x}(0)$，$\dot{y}(0)$ の中の二つに過ぎず ($(x(0), y(0))$，$(\dot{x}(0), \dot{y}(0))$ の組合せは不可)，系の自由度は2である．このように拘束条件を反映して自由度に制限が生ずるが，拘束系を Lagrange 形式で扱うことに問題はない．

では，Hamilton 形式ではどうであろうか．周知のように，式 (5-6) の Lagrangian に対応する Hamiltonian は各力学変数 x，y，λ に正準共役な運動量

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \quad p_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} \tag{5-9}$$

を使って

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{\lambda}p_\lambda - L \tag{5-10}$$

として定義される．ただし，H は正準変数 $(x, y, \lambda, p_x, p_y, p_\lambda)$ の関数として表現されていなければならない．通常ならば式 (5-9) を使って $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{\lambda}$ を正準変数で表現し，これを式 (5-10) の右辺に代入すれば良いのだが，この例では

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_\lambda = 0 \tag{5-11}$$

となり，$\dot{\lambda}$ は決まらない．ところが都合の良いことに L は $\dot{\lambda}$ を含まず，$p_\lambda = 0$ によって式 (5-10) 右辺の第3項は消えてしまうため[1]，Hamiltonian は

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - mgx - \lambda F(x, y) \tag{5-12}$$

として与えられることになる．ここまでは何の問題もない．問題なのは通常の意味での正準方程式が成立しないことである．仮に正準方程式が成立するとすれば $F(x, y)$ の関数形によらず $\dot{\lambda} = \partial H/\partial p_\lambda = 0$，つまり λ は定数となるが，例えば $F(x, y) = x + y^2$ の場合には次のような不都合が生ずる．つまり，正準方程式から

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = mg + \lambda, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m},$$

---

1) 式 (5-9) からでは決まらない変数 $\dot{\lambda}$ が式 (5-10) の右辺から自動的に消えてしまったのは偶然ではない．次節で示すように，どのような拘束系の Lagrangian からでも Hamiltonian は構成できるのである．

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 2\lambda y$$

を得るが，λ が定数ならば x は等加速度運動を $(\ddot{x} = g + \lambda/m)$，$y$ は単振動か指数関数的な運動を $(\ddot{y} = 2\lambda y/m)$ することになり，式 (5-2) の拘束条件は満足し得ないのである．では，なぜ正準方程式が成立しないのであろうか．

正準方程式が導かれる過程を振り返ってみよう．大まかに言えば「正準変数が微少量だけ変化した場合の Hamiltonian の変化量を 2 通りの方法で計算し，両者が一致することを利用する」のである．まず第一の方法では Hamiltonian が正準変数 x，y，λ，p_x，p_y，p_λ の関数であることに基づき

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial p_x}\delta p_x + \frac{\partial H}{\partial p_y}\delta p_y + \frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda + \frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial y}\delta y + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\delta\lambda \tag{5-13}$$

とする．一方，第2の方法では式 (5-10) の右辺に登場する $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{\lambda}$ が正準変数の関数として与えられているという立場を取る．この場合，正準変数の微少変化による $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{\lambda}$ および L の変化量を $\delta\dot{x}$，$\delta\dot{y}$，$\delta\dot{\lambda}$，δL とすれば，Hamiltonian の変化量は

$$\delta H = (\delta\dot{x})p_x + \dot{x}\delta p_x + (\delta\dot{y})p_y + \dot{y}\delta p_y + (\delta\dot{\lambda})p_\lambda + \dot{\lambda}\delta p_\lambda - \delta L \tag{5-14}$$

と書ける[1]．ところが x，y，λ と $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{\lambda}$ の関数である L の変化量 δL は

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\delta\lambda + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\delta\dot{\lambda}$$

として与えられるから式 (5-14) は

$$\begin{aligned}\delta H = {} & \dot{x}\delta p_x + \dot{y}\delta p_y + \dot{\lambda}\delta p_\lambda - \frac{\partial L}{\partial x}\delta x - \frac{\partial L}{\partial y}\delta y - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\delta\lambda \\ & + \left(p_x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\delta\dot{x} + \left(p_y - \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)\delta\dot{y} + \left(p_\lambda - \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)\delta\dot{\lambda}\end{aligned} \tag{5-15}$$

となる．更に正準運動量の定義式 (5-9) によれば $\delta\dot{x}$，$\delta\dot{y}$，$\delta\dot{\lambda}$ の係数は全て零となり，Euler-Lagrange 方程式によって式 (5-15) は

$$\delta H = \dot{x}\delta p_x + \dot{y}\delta p_y + \dot{\lambda}\delta p_\lambda - \dot{p}_x\delta x - \dot{p}_y\delta y - \dot{p}_\lambda\delta\lambda \tag{5-16}$$

---

1)　例えば $\delta\dot{x}$ は

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial\dot{x}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\dot{x}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\dot{x}}{\partial\lambda}\delta\lambda + \frac{\partial\dot{x}}{\partial p_x}\delta p_x + \frac{\partial\dot{x}}{\partial p_y}\delta p_y + \frac{\partial\dot{x}}{\partial p_\lambda}\delta p_\lambda$$

と書けるが，以下に示すように $\delta\dot{x}$，$\delta\dot{y}$，$\delta\dot{\lambda}$ に関する項は δL に由来する成分と相殺するため細かな表現は必要ない．実は $\delta\dot{x}$，$\delta\dot{y}$，$\delta\dot{\lambda}$ に関する項が相殺するように Lagrangian から Hamiltonian への変換 (Legendre 変換) がなされたのである．

と変形できる．そして，式 (5-16) の両辺から式 (5-13) の辺々を引けば

$$0=\left(\dot{x}-\frac{\partial H}{\partial p_x}\right)\delta p_x+\left(\dot{y}-\frac{\partial H}{\partial p_y}\right)\delta p_y+\left(\dot{\lambda}-\frac{\partial H}{\partial p_\lambda}\right)\delta p_\lambda$$
$$+\left(-\dot{p}_x-\frac{\partial H}{\partial x}\right)\delta x+\left(-\dot{p}_y-\frac{\partial H}{\partial y}\right)\delta y+\left(-\dot{p}_\lambda-\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)\delta \lambda \qquad (5\text{-}17)$$

が導かれる．従って，仮に全ての正準変数が独立に変化できるとすれば式 (5-17) における δp_x，δp_y，δp_λ，δx，δy，$\delta\lambda$ の係数は全て零でなければならず，正準方程式が結論されることになる．ところが，ここで扱っている拘束系では式 (5-11) に示すように p_λ は常に $p_\lambda=0$ に拘束されている．従って $\delta p_\lambda=0$ であり，式 (5-17) の δp_λ の係数は零である必要はない．これが λ に関する正準方程式が成立しない理由である．ただし p_λ 以外の正準変数は独立に変化できるため δp_x，δp_y，δx，δy，$\delta\lambda$ の係数は零でなければならず

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p_x},\quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y},\quad \dot{p}_x=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad \dot{p}_\lambda=-\frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad (5\text{-}18)$$

までは結論される．

ところで，ここで対象としているのは 1 本の曲線上に拘束された質点の運動であり，前述のように自由度は 2 に過ぎない．それゆえ，粒子の運動は x，y，λ，p_x，p_y，p_λ で記述される 6 次元の位相空間の中の 2 次元の部分多様体 Γ に制限されることが予想される．6 次元を 2 次元に制限するには 4 種の独立な拘束条件が必要となるが，これまでの議論で得られたのは $p_\lambda=0$ だけである．本来の拘束条件 $F(x,y)=0$ は勿論のこと，残りの二つの拘束条件はどのようにして得られるのであろうか．また，λ に関する正準方程式が成立しないとすると，代表点 (位相空間内の点) の運動はどのようにして決まるのであろうか．

まずは第 1 次拘束条件 (primary constraint)，つまり Lagrangian の形から直接に決まる拘束条件である $p_\lambda=0$ から始めよう．この例では一つの変数 p_λ のみに関する条件になっているが，正準変数間の拘束条件を扱う一般論を考慮して

$$\phi(x,y,\lambda,p_x,p_y,p_\lambda,t)\equiv p_\lambda \qquad (5\text{-}19)$$

を定義し，$p_\lambda=0$ を $\phi=0$ と記すことにしよう[1]．いずれにせよ，この条件によって代表点の運動は $6-1=5$ 次元の部分多様体 Γ_0 に制限される．ところで代表点は式 (5-18) に従って運動するから

1) こうすることで拘束条件を規定する関数 ϕ が位相空間全体で定義され，時間にも依存し得ることが判然とする．ここでは ϕ が p_λ 以外の変数に依存しない特別な場合を扱っていることになる．

$$\dot{\phi} = \dot{p}_\lambda = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = F(x,y) \tag{5-20}$$

が成立し，$F(x,y) \neq 0$ となるような代表点は Γ_0 を飛び出してしまう．代表点が Γ_0 に留まるためには $\dot{\phi} = F = 0$ でなければならず，代表点は4次元の部分多様体 Γ_1 に制限されることになる．ところが，x，y もまた式(5-18)に従って変化し

$$\ddot{\phi} = \dot{F} = F_x(x,y)\dot{x} + F_y(x,y)\dot{y} = F_x(x,y)\frac{p_x}{m} + F_y(x,y)\frac{p_y}{m} = \frac{1}{m}DF$$
$$D = p_x\partial_x + p_y\partial_y \tag{5-21}$$

となるから (∂_x，∂_y は x や y に関する偏微分演算子) 代表点が Γ_1 に留まるためには $\ddot{\phi} = m^{-1}DF = 0$ が必要であり，代表点は3次元の部分多様体 Γ_2 に制限されることになる．こうした議論を続ければ，

$$\phi^{(m)}(x,y,\lambda,p_x,p_y,p_\lambda,t) \equiv \frac{d^m\phi}{dt^m}(x,y,\lambda,p_x,p_y,p_\lambda,t) = 0$$
$$(m = 0,1,2,3,\cdots) \tag{5-22}$$

の全てが要求されることが分かる．これを整合性の条件 (consistency condition) といい，整合性の条件から導出される拘束条件を第2次拘束条件 (secondary constraint) と称する[1)]，$\phi^{(m)}$ が位相空間内の点 $P = (x,y,\lambda,p_x,p_y,p_\lambda)$ と時間 t の関数として定義されている点に注意しよう．時刻 t に点 P を通る軌跡は一意的に決まり，この軌跡に沿って ϕ は時間の関数となるが[2)]，その m 階導関数として $\phi^{(m)}$ が定義される．軌跡が P と t で決まるため $\phi^{(m)}$ は P と t の関数となるのである．

ところで，上述の多様体 Γ_0 では式(5-22)の $m=0$ の場合だけが成立し，Γ_1，Γ_2 ではそれぞれ $m \leq 1$，$m \leq 2$ の場合が成立する．m を増やす毎に新たな第2次拘束条件が生じ，代表点が存在すべき多様体 Γ_0，Γ_1，Γ_2 の次元が順次に減少しているが，対象としている系の自由度が2であることを考えれば，多様体の次元が2になった段階で新たな条件は生じなくなる筈である．これを確かめてみよう．

まず3階微分であるが，式(5-18)により $\dot{p}_x = mg + \lambda F_x$，$\dot{p}_y = \lambda F_y$ となることから

$$\phi^{(3)} = \frac{1}{m}(\dot{p}_x\partial_x + \dot{p}_y\partial_y)F + \frac{1}{m}(p_x\partial_x + p_y\partial_y)\frac{d}{dt}F$$
$$= gF_x + \frac{\lambda}{m}(F_x^2 + F_y^2) + \frac{1}{m^2}D^2F \tag{5-23}$$

---

1) 従って $F=0$ や $m^{-1}DF=0$ は第2次拘束条件である．

2) 軌跡を $(x(t), y(t), \lambda(t), p_x(t), p_y(t), p_\lambda(t))$ とすれば，その関数は $\phi(x(t), y(t), \lambda(t), p_x(t), p_y(t), p_\lambda(t), t)$ ．

を得る．$\phi^{(3)}=0$ は新たな拘束条件となり，代表点の運動は 2 次元多様体 Γ_3 に制限される．また

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D^2F &= 2(\dot{p}_x\partial_x+\dot{p}_y\partial_y)DF+D^2\frac{d}{dt}F\\ &= 2\{(mg+\lambda F_x)\partial_x+\lambda F_y\partial_y\}DF+\frac{1}{m}D^3F\\ &= 2mgDF_x+\lambda D(F_x^2+F_y^2)+\frac{1}{m}D^3F\end{aligned}$$

が成立することから，4 階微分は

$$\phi^{(4)}=\frac{\dot{\lambda}}{m}(F_x^2+F_y^2)+\frac{3g}{m}DF_x+\frac{2\lambda}{m^2}D(F_x^2+F_y^2)+\frac{1}{m^3}D^3F \qquad (5\text{-}24)$$

として与えられる．仮に $\phi^{(4)}=0$ が新たな拘束条件となれば代表点は 1 次元空間に制限され，対象としている系の自由度が 2 であることに矛盾するのであるが，幸いにも式 (5-24) の右辺は全く自由に設定できる $\dot{\lambda}$ を含んでいる．このため $\dot{\lambda}$ を

$$\dot{\lambda}=-\frac{3m^2gDF_x+2m\lambda D(F_x^2+F_y^2)+D^3F}{m^2(F_x^2+F_y^2)} \qquad (5\text{-}25)$$

として設定すれば $\phi^{(4)}=0$ は満足され，新たな第 2 次拘束条件は発生しない．しかも $\phi^{(4)}$ は位相空間内で (少なくとも Γ_3 内で) 恒等的に零となるため代表点がどのように動いても $\phi^{(4)}=0$ は常に満足され，新たな第 2 次拘束条件を導入せずに $m\geq 4$ に対して式 (5-22) の成立が保証されるのである．

以上の議論をまとめてみよう．出発点は第 1 次拘束条件 $\phi=0$ であり，式 (5-18) に従って代表点が動いた場合でもこの条件が常に成立する，という要求から λ の運動が式 (5-25) で規定され，代表点の運動は予想されたように 4 種の条件

$$\left.\begin{aligned}\phi&=0\\ F&=0\\ m^{-1}DF&=0\\ gF_x+\lambda m^{-1}(F_x^2+F_y^2)+m^{-2}D^2F&=0\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}26)$$

を満足する 2 次元の部分多様体 $\Gamma\equiv\Gamma_3$ に制限されることになる．一方，式 (5-18) は

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H}{\partial p_x}=\frac{p_x}{m},\quad \dot{y}=\frac{\partial H}{\partial p_y}=\frac{p_y}{m}\\ \dot{p}_x&=-\frac{\partial H}{\partial x}=mg+\lambda F_x,\quad \dot{p}_y=-\frac{\partial H}{\partial y}=\lambda F_y,\\ \dot{p}_\lambda&=-\frac{\partial H}{\partial \lambda}=F=0\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}27)$$

となり，これと式 (5-25) を合わせて代表点の運動が決まる．つまり，Γ 内に初期条

件が与えられれば，式(5－25)，(5－27)に従って代表点を動かすことによって代表点の軌跡が確定するのである．この軌跡が Γ 内に留まることは言うまでもない．

さて，式(5－27)から p_x，p_y を消去すれば

$$m\ddot{x} = mg + \lambda F_x, \quad m\ddot{y} = \lambda F_y$$

を得るが，これらは式(5－7a)，(5－7b)に他ならない．また，式(5－7c)は式(5－26)の一部となっている．このように，Hamilton 形式は Lagrange 形式を再現するが，単にそれだけではない．Lagrange 形式で得られるのは式(5－7a)，(5－7b)，(5－7c)だけであり，原理的にはこれだけで粒子の運動が決まるのであるが，どうすれば拘束条件 (5－7c) 付きの微分方程式(5－7a)，(5－7b) を解けるのかが具体的な形で与えられていない．一方，前述のように，Hamilton 形式では Γ 内に初期条件を選びさえすれば式(5－25)，(5－27)に従って代表点を動かせば良いのである．

5－2　一般的な拘束系

今度は N 個の一般化座標 $\{q_n\}_{n=1\sim N}$ に依存する Lagrangian $L(q,\dot{q},t)$ を考え[1)]，前節の議論を一般化しよう．この系の Hamiltonian は一般化座標 $\{q_n\}$，それらに共役な正準運動量 $\{p_n\}$

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \quad (n = 1 \sim N) \tag{5-28}$$

および時間 t の関数であり

$$H(q,p,t) \equiv \sum_{n=1}^{N} p_n \dot{q}_n - L(q,\dot{q},t) \tag{5-29}$$

として定義される．右辺に登場する $\{\dot{q}_n\}$ は正準変数 $\{q_n\}$，$\{p_n\}$ と t の関数として表現されていなければならないが，その関数形を決めるのが式(5－28)である．

多くの場合 Lagrangian は $\{\dot{q}_n\}$ に関して高々 2 次の多項式だから，先ずはこの場合から始めよう．この場合，$\{p_n\}$ は $\{\dot{q}_n\}$ に関して高々 1 次であり，N 次元ベクトル $\boldsymbol{p}$，$\dot{\boldsymbol{q}}$ と N 次対称行列 J ($\{\dot{q}_n\}$ に対する L の Hessian 行列) を

$$[\boldsymbol{p}]_n \equiv p_n, \quad [\dot{\boldsymbol{q}}]_n \equiv \dot{q}_n, \quad [J]_{mn} \equiv \frac{\partial p_m}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_m \partial \dot{q}_n} \tag{5-30}$$

で定義すれば ($[\boldsymbol{p}]_n$ は $\boldsymbol{p}$ の第 n 要素を，$[J]_{mn}$ は J の mn 要素を表す)，式(5－28)は

$$\boldsymbol{p} = J(q,t)\dot{\boldsymbol{q}} \tag{5-31}$$

1) 正確には $L(q_1, q_2, \cdots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_N, t)$ と記すべきであるが $L(q,\dot{q},t)$ と略記した．また，添え字の範囲が明らかな場合には $\{q_n\}_{n=1\sim N}$ を $\{q_n\}$ と略記する．

と書ける．行列 J は $\{q_n\}$ と t の関数であり，$\{\dot{q}_n\}$ には依存しない．さて，行列 J のランク $R \equiv \mathrm{Rank}(J)$ が $\{q_n\}$ や t に依らず一定であるとしよう[1]．$R=N$ ならば J は可逆であり，$\{q_n\}$ と t を指定すれば $\dot{\boldsymbol{q}}$ と $\boldsymbol{p}$ は1対1に対応する．実際，$\{\dot{q}_n\}$ は $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ 及び t の関数として $\dot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}\boldsymbol{p}$ と表現され，これを式 (5-29) の右辺に代入することで Hamiltonian が定まる．一方，$R<N$ の場合には $\dot{\boldsymbol{q}}$ と $\boldsymbol{p}$ の対応は多対1であり，$\{p_n\}$，$\{q_n\}$，t を指定しても $\{\dot{q}_n\}$ は決まらない．$R<N$ となるような Lagrangian を特異 Lagrangian と称して特別扱いするのはこのためである．

ところで，式 (5-6) の特異 Lagrangian からでも式 (5-12) の Hamiltonian が構成できたように，一般の場合でも式 (5-29) の右辺から $\{\dot{q}_n\}$ を消去することは可能である．実際，$\{q_n\}$，$\{\dot{q}_n\}$ が $\{q_n+\delta q_n\}$，$\{\dot{q}_n+\delta\dot{q}_n\}$ に変化することによって $\{p_n\}$ が $\{p_n+\delta p_n\}$ に，H が $H+\delta H$ に変化したとすれば

$$
\begin{aligned}
\delta H &= \sum_{n=1}^{N}(\delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta\dot{q}_n) - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial L}{\delta q_n}\delta q_n + \frac{\partial L}{\delta \dot{q}_n}\delta\dot{q}_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left\{\dot{q}_n\delta p_n + \left(p_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)\delta\dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n}\delta q_n\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{N}(\dot{q}_n\delta p_n - \dot{p}_n\delta q_n)
\end{aligned}
$$

が成立し，右辺には $\{\delta\dot{q}_n\}$ が含まれない．これは $\{\dot{q}_n\}$ が $\{p_n\}$ や $\{q_n\}$ を介してのみ H に寄与することを意味しており，$\{\dot{q}_n\}$ が $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，t の関数として陽に表現されていなくとも Hamiltonian は構成できることが分かる[2]．

ランク R の N 次対称行列 J は適当な N 次直交行列 T によって

$$
J' = TJT^t = \begin{pmatrix} \Lambda_R & 0_{M,N} \\ 0_{N-R,R} & 0_{N-R,N-R} \end{pmatrix} \tag{5-32}
$$

と変形できることに注意しよう[3]．ただし Λ_R は R 次の対角行列，$0_{M,N}$ は M 行 N 列の零行列である．行列 T の第1行から第 R 行までを切り出した部分行列を $T_{R,N}$，残りの部分行列を $T_{N-R,N}$ とすれば，式 (5-31) から

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} = J\dot{\boldsymbol{q}} \quad \to \quad T\boldsymbol{p} = TJ\dot{\boldsymbol{q}} = TJT^tT\dot{\boldsymbol{q}} = J'T\dot{\boldsymbol{q}} &= J'\begin{pmatrix} T_{R,N} \\ T_{N-R,N} \end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{q}} \\
&= \begin{pmatrix} \Lambda_R T_{R,N} \\ 0_{N-R,N} \end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}
$$

---

1) 有限個の点で異なる値をとる場合は，そのような「特異点」を除外して考える．

2) ここでは Lagrangian が $\{\dot{q}_n\}$ の二次多項式であることを仮定していない点に注意．

3) 例えば，岡本良夫；『逆問題とその解き方』，オーム社 (1992)，108ページ．

が導かれ ($T^t = T^{-1}$ を利用)，これを成分で書けば

$$\sum_{n=1}^{N}[T]_{mn}p_n = \sum_{n=1}^{N}[\Lambda_R T_{R,N}]_{mn}\dot{q}_n \quad (m = 1 \sim R) \tag{5-33a}$$

$$\sum_{n=1}^{N}[T]_{mn}p_n = 0 \qquad (m = R+1 \sim N) \tag{5-33b}$$

となる．式 (5-33a) は指定された $\{p_n\}$，$\{q_n\}$，t に対応する $\{\dot{q}_n\}$ を規定するが[1)]，式 (5-33b) は $\{\dot{q}_n\}$ を含まないため $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ に対する拘束条件となる．これらは Lagrangian の関数形から直接に決まる拘束条件，すなわち第1次拘束条件である．ここで

$$\phi_k(q,p,t) \equiv \sum_{n=1}^{N}[T(q,t)]_{R+k,n}p_n \quad (k = 1 \sim K_1)$$
$$K_1 \equiv N - \mathrm{Rank}(J) \tag{5-34}$$

とすれば，これら K_1 個の第1次拘束条件は

$$\phi_k(q,p,t) = 0 \quad (k = 1 \sim K_1) \tag{5-35}$$

として与えられることになる．

Lagrangian が $\{\dot{q}_n\}$ に関して必ずしも2次の多項式とは限らない一般の場合でも式 (5-28) は $\{q_n\}$，t をパラメータとする $\dot{\boldsymbol{q}}$ から $\boldsymbol{p}$ への写像 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P}(\dot{\boldsymbol{q}}; q, t)$ を定義し，この写像の局所的な性質は式 (5-30) の Hessian 行列 J によって決まる (ただし行列 J は $\{q_n\}$，t だけでなく $\dot{\boldsymbol{q}}$ にも依存する)．なぜなら，この写像によって $\dot{\boldsymbol{q}}_0$ が $\boldsymbol{p}_0$ に写されたとすれば，$\dot{\boldsymbol{q}}_0$ 近傍で

$$\delta\boldsymbol{p} = J(\dot{\boldsymbol{q}}_0; q, t)\delta\dot{\boldsymbol{q}}, \quad \delta\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0, \quad \delta\dot{\boldsymbol{q}} \equiv \dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_0 \tag{5-36}$$

が成立するからである[2)]．従って，局所的性質に関する限り式 (5-31) から導かれた結果は任意の系に対しても適用できることになる．例えば $R \equiv \mathrm{Rank}(J(\dot{\boldsymbol{q}}_0; q, t))$ とすると，$R = N$ ならば写像 $\boldsymbol{P}$ は1対1であり，逆写像 $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{p}; q, t)$ が存在する．また，$R < N$ の場合は $\dot{\boldsymbol{q}}$ と $\boldsymbol{p}$ の対応が多対1となり，$\{p_n\}$，$\{q_n\}$，t を指定しても $\{\dot{q}_n\}$ は決まらない．また正準変数の間には式 (5-35) に示すような $K_1 \equiv N - R$ 個の第1次拘束条件が要求される．ただし拘束条件を規定する関数 $\{\phi_k\}$ が式 (5-34) の形に表現できるとは限らない ($\{\phi_k\}$ が $\{p_n\}$ の線形関数とは限らない)．

---

1) もちろん，$\{\dot{q}_n\}$ は一意的には定まらない．
2) 仮に J が $\dot{\boldsymbol{q}}$ に依存せず，全ての $\dot{\boldsymbol{q}}$ に対して同一の J が使える場合には式 (5-36) は式 (5-31) となる．

さて，前節の式(5-17)を導いたのと同様にして

$$0=\sum_{n=1}^{N}\left(\dot{q}_n-\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)\delta p_n+\sum_{n=1}^{N}\left(-\dot{p}_n-\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)\delta q_n \qquad (5-37)$$

が導かれるので，$\{\delta q_n\}$，$\{\delta p_n\}$ が独立だとすれば通常の正準方程式が導出される．しかし，特異系では式(5-35)の拘束条件のため $\{\delta q_n\}$，$\{\delta p_n\}$ は

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial \phi_k}{\partial p_n}\delta p_n\right)=0 \quad (k=1\sim K_1) \qquad (5-38)$$

を満足する．そこでLagrangeの未定乗数法を適用し，式(5-37)を

$$\begin{aligned}0&=\sum_{n=1}^{N}\left(\dot{q}_n-\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)\delta p_n+\sum_{n=1}^{N}\left(-\dot{p}_n-\frac{\partial H}{\partial q_n}\right)\delta q_n\\&\qquad-\sum_{k=1}^{K_1}u_k\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial \phi_k}{\partial p_n}\delta p_n\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}\left(\dot{q}_n-\frac{\partial H}{\partial p_n}-\sum_{k=1}^{K_1}u_k\frac{\partial \phi_k}{\partial p_n}\right)\delta p_n\\&\qquad+\sum_{n=1}^{N}\left(-\dot{p}_n-\frac{\partial H}{\partial q_n}-\sum_{k=1}^{K_1}u_k\frac{\partial \phi_k}{\partial q_n}\right)\delta q_n\end{aligned}$$

と書き換えると，未定乗数 $\{u_k\}_{k=1\sim K_1}$ の導入によって $\{\delta q_n\}$，$\{\delta p_n\}$ は形式的には独立に変化できるから

$$\dot{q}_n=\frac{\partial H}{\partial p_n}+\sum_{k=1}^{K_1}u_k\frac{\partial \phi_k}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n=-\frac{\partial H}{\partial q_n}-\sum_{k=1}^{K_1}u_k\frac{\partial \phi_k}{\partial q_n} \qquad (5-39)$$

が結論されることになる[1]．K_1 個の未定乗数 $\{u_k\}$ を導入したことにより $2N$ 個の正準変数 $\{q_n\}$，$\{p_n\}$ と合わせて未知関数の数は $2N+K_1$ となったが，$2N$ 個の1階微分方程式(5-39)の他に K_1 個の拘束条件 (5-35)があるのでバランスは取れている．

代表点 (q,p) が式(5-39)に従って位相空間内を移動するとき，その軌道に沿っての任意の物理量 $F(q,p,t)$ の時間微分は

$$\frac{d}{dt}F(q(t),p(t),t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{\partial F}{\partial q_n}\dot{q}_n+\frac{\partial F}{\partial p_n}\dot{p}_n\right\}$$

1) 前節の例では第1次拘束条件が一つの正準変数を含む単純な形 $(p_\lambda=0)$ であったため，式(5-17)から直接に式(5-18)が結論された．しかし，$\{q_n\}$，$\{p_n\}$ の全てを含む一般的な拘束条件を扱うにはLagrangeの未定乗数法を使うのが最も自然である．

$$= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_n}\frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial H}{\partial q_n} \right\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{K_1} u_k \sum_{n=1}^{N} \left\{ \frac{\partial F}{\partial q_n}\frac{\partial \phi_k}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial \phi_k}{\partial q_n} \right\}$$

すなわち

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_P + \sum_{k=1}^{K_1} u_k \{F, \phi_k\}_P \tag{5-40}$$

と表現できる．$\{.,.\}_P$ は言うまでもなく Poisson 括弧であり，特異系でも非特異系の場合と同様に

$$\{F, G\}_P \equiv \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_n}\frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial G}{\partial q_n} \right) = (\nabla F)^t J_{2N} (\nabla G) \tag{5-41}$$

として定義される．ここで J_{2N} は $2N$ 次基本シンプレクティック行列[1]であり，N 次の単位行列 I_N と零行列 0_N を用いて

$$J_{2N} \equiv \begin{pmatrix} 0_N & I_N \\ -I_N & 0_N \end{pmatrix} \tag{5-42}$$

と定義される．また，∇ は $2N$ 次元の位相空間における勾配演算子であり，例えば縦ベクトル ∇F を転置して得られる横ベクトル $(\nabla F)^t$ は次式で与えられる．

$$(\nabla F)^t = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \frac{\partial F}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial q_N}, \frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial p_N} \right) \tag{5-43}$$

さて，全 Hamiltonian H_T を

$$H_T(q, p, t) \equiv H(q, p, t) + \sum_{k=1}^{K_1} u_k \phi_k(q, p, t) \tag{5-44}$$

で定義すれば

$$\{F, H_T\}_P = \{F, H\}_P + \sum_{k=1}^{K_1} \{F, u_k \phi_k\}_P$$

$$= \{F, H\}_P + \sum_{k=1}^{K_1} u_k \{F, \phi_k\}_P + \sum_{k=1}^{K_1} \{F, u_k\}_P \phi_k$$

---

1) 一般に $S^t J_{2N} S = J_{2N}$ を満足する $2N$ 次の行列はシンプレクティック行列 (symplectic matrix) と呼ばれるが，J_{2N} に対する共通の名称は無いようである．ここでは J_{2N} 自体がシンプレクティックであり，最も単純な形を持つことから「基本シンプレクティック行列」と呼ぶことにした．

が成立するから式(5-40)は

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H_T\}_P-\sum_{k=1}^{K_1}\{F,u_k\}_P\phi_k \tag{5-45}$$

と書ける．ところが，代表点の運動は1次拘束条件 (5-35) を満足する多様体 Γ_0 に限られており，Γ_0 上では式(5-45)の最後の項は零となるから

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H_T\}_P \qquad (\Gamma_0 \text{ 上で}) \tag{5-46}$$

と表現できる．このように特異系では「$\cdots$ 上で」という条件の下で成立する等式を扱うことが多く，但し書きを繰り返すのは面倒なので，式(5-46)を

$$\frac{dF}{dt}\underset{\Gamma_0}{\approx}\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H_T\}_P \tag{5-47}$$

などと記すことにする．記号 "$\approx$" は弱等号と呼ばれ，位相空間の適当な部分多様体上 (この場合は Γ_0 上) でのみ等しいことを意味する[1]．どの部分多様体を想定しているのかが明らかな場合には弱等号だけで表現する場合もある．

さて，前節では代表点が移動しても第1次拘束条件が常に満足されなければならない，という要請から整合性の条件が導かれた．一般の場合でも単に第1次拘束条件が複雑になることを考慮すれば良く，整合性の条件は

$$\phi_k^{(m)}(q,p,t)\equiv\frac{d^m\phi_k}{dt^m}(q,p,t)=0 \quad (k=1\sim K_1, \quad m=0,1,2,\cdots) \tag{5-48}$$

と表現できる．$m=0$ の場合だけを考えれば第1次拘束条件そのものであり，これを満足するのは上述の多様体 Γ_0 である．$m=1,2,\cdots$ と進むに従って第2次拘束条件が登場し，それらを満足する多様体 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots$ の次元は順次に減少するが，この次元の減少は有限ステップで終了し，前節と同様に式(5-48)の全てを満足する多様体 Γ に行き着く．言うまでもなく代表点の運動は Γ 内に制限される．

一般拘束系での整合性条件を論議する前に具体的な計算をしてみよう．再び式(5-6)の Lagrangian を対象とするが，前節とは異なり第1次拘束条件を Lagrange の未定乗数法で処理し，Hamiltonian としては式(5-44)に対応する

$$H_T=H+u_1\phi_1=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}-mgx-\lambda F(x,y)+u_1p_\lambda \tag{5-49}$$

を考える．記法を統一するため前節の ϕ を ϕ_1 と記すことにし，前節と同様に第1次

1) 仮に $\{u_k\}$ が定数だったとすれば式(5-47)は通常の等式として成立する点に注意しよう．つまり，弱等式では $\{u_k\}$ は定数のように振る舞うと考えてもよい．

拘束条件 $\phi_1 = 0$ を満足する部分多様体を Γ_0 とする．

さて，ϕ_1 は時間を陽に含まないので式 (5-47) から

$$\dot{\phi}_1 = \frac{d\phi_1}{dt} \underset{\Gamma_0}{\approx} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \{\phi_1, H_T\}_P = \{\phi_1, H_T\}_P = (\nabla\phi_1)^t J_6(\nabla H_T)$$

を得るが

$$J_6(\nabla H_T) = J_6 \begin{pmatrix} -mg - \lambda F_x \\ -\lambda F_y \\ -F \\ p_x/m \\ p_y/m \\ u_1 \end{pmatrix} + J_6(\nabla u_1)p_\lambda \underset{\Gamma_0}{\approx} \begin{pmatrix} p_x/m \\ p_y/m \\ u_1 \\ mg + \lambda F_x \\ \lambda F_y \\ F \end{pmatrix}$$

であり[1]，$(\nabla\phi_1)^t = (0,0,0,0,0,1)$ だから

$$\dot{\phi}_1 \underset{\Gamma_0}{\approx} F \tag{5-50}$$

が結論される．これは式 (5-20) に他ならず[2]，代表点の運動は Γ_0 上で $F = 0$ が満足される多様体 Γ_1 に制限される．また，$(\nabla F)^t = (F_x, F_y, 0, 0, 0, 0)$ だから

$$\ddot{\phi}_1 \underset{\Gamma_1}{\approx} \dot{F} \underset{\Gamma_1}{\approx} (\nabla F)^t J_6(\nabla H_T) \underset{\Gamma_1}{\approx} (p_x F_x + p_y F_y)/m = DF/m \tag{5-51}$$

であり，代表点は Γ_1 上で $DF/m = 0$ が満足される多様体 Γ_2 に制限される．同様に

$$\phi_1^{(3)} \underset{\Gamma_2}{\approx} gF_x + \frac{\lambda}{m}(F_x^2 + F_y^2) + \frac{1}{m^2}D^2 F \tag{5-52}$$

$$\phi_1^{(4)} \underset{\Gamma_3}{\approx} \frac{u_1}{m}(F_x^2 + F_y^2) + \frac{3g}{m}DF_x + \frac{2\lambda}{m^2}D(F_x^2 + F_y^2) + \frac{1}{m^3}D^3 F \tag{5-53}$$

を得るが，これらは式 (5-21)，(5-23)，(5-24) に対応している．式 (5-53) で u_1 が初めて登場してきたが，この未定乗数 u_1 を

$$u_1 = -\frac{3m^2 gDF_x + 2m\lambda D(F_x^2 + F_y^2) + D^3 F}{m^2(F_x^2 + F_y^2)} \tag{5-54}$$

と選べば $\phi_1^{(4)}$ は $\Gamma \equiv \Gamma_3$ 上で恒等的に零となり，整合性の条件が完全に満足される．また，u_1 が決まれば λ に関する微分方程式

$$\dot{\lambda} = \partial H_T/\partial p_\lambda = u_1 \tag{5-55}$$

---

1) ここでも弱等号の下では u_1 は定数のように振る舞う．

2) ϕ_1 の時間微分を計算するのに式 (5-47) ではなく式 (5-40) を使えば式 (5-50) は通常の等式の意味でも成立していることが分かる．その意味で式 (5-50) は式 (5-20) と全く同じである．わざわざ弱等号の形式で表現したのは後の議論との一貫性を重要視したからである．

が確定するが，これは式 (5－25) に他ならない．

上の例では 3 個の第 2 次拘束条件を導出した上で未定乗数が確定したが，第 2 次拘束条件を全く導出せずに未定乗数が決まる場合もあり，未定乗数が最後まで不定のまま残る場合もある．例えば

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2)^2 + cq_2\dot{q}_3 \quad (c \text{ は定数}) \tag{5-56}$$

を考えると，以下に示すように $c \neq 0$ ならば第 2 次拘束条件を導出せずに未定乗数が決まり，$c = 0$ ならば未定乗数が最後まで不定のまま残る．まず

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_1(\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2), \quad p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = cq_2 \tag{5-57}$$

であり，Hamiltonian は

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 - L = \frac{1}{2}p_1^2 \tag{5-58}$$

と表現できる．また，

$$J = \begin{pmatrix} 1 & q_1 & 0 \\ q_1 & q_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Rank}(J) = 1 \quad \rightarrow \quad K_1 = 3 - 1 = 2$$

から予想されるように，正準変数の間には二つの第 1 次拘束条件

$$\phi_1 \equiv q_1p_1 - p_2 = 0, \quad \phi_2 \equiv p_3 - cq_2 = 0 \tag{5-59}$$

が成立している．この場合には

$$H_T = \frac{1}{2}p_1^2 + u_1\phi_1 + u_2\phi_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + u_1(q_1p_1 - p_2) + u_2(p_3 - cq_2) \tag{5-60}$$

であり，第 1 次拘束条件が満足される多様体を Γ_0 として

$$J_6(\nabla H_T) \underset{\Gamma_0}{\approx} \begin{pmatrix} p_1 + u_1q_1 \\ -u_1 \\ u_2 \\ -u_1p_1 \\ cu_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} (\nabla\phi_1)^t = (p_1, 0, 0, q_1, -1, 0) \\ (\nabla\phi_2)^t = (0, -c, 0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

と書けることから，

$$\dot{\phi}_1 \underset{\Gamma_0}{\approx} (\nabla\phi_1)^t J_6(\nabla H_T) \underset{\Gamma_0}{\approx} p_1^2 - cu_2$$
$$\dot{\phi}_2 \underset{\Gamma_0}{\approx} (\nabla\phi_2)^t J_6(\nabla H_T) \underset{\Gamma_0}{\approx} cu_1 \qquad (5-61)$$

を得る．従って $c \neq 0$ ならば未定乗数を

$$u_1 = 0, \quad u_2 = p_1^2/c \qquad (5-62)$$

と選ぶことによって整合性の条件は完全に満足され，第 2 次の拘束条件は現われない．一方，$c = 0$ ならば $\dot{\phi}_2$ は恒等的に零となり ϕ_2 に関する整合性の条件は既に満足されている．また，$\dot{\phi}_1$ に関しては第 2 次拘束条件 $p_1^2 = 0$ が生ずるが，Γ_0 上で $p_1^2 = 0$ が満足される多様体を Γ_1 とすれば，$(\nabla p_1^2)^t = (0,0,0,2p_1,0,0)$ を使って

$$\ddot{\phi}_1 \underset{\Gamma_1}{\approx} (\nabla p_1^2)^t J_6(\nabla H_T) \underset{\Gamma_1}{\approx} -2u_1 p_1^2 \underset{\Gamma_1}{\approx} 0 \qquad (5-63)$$

を得る．つまり，$\ddot{\phi}_1$ は Γ_1 上では恒等的に零となるから u_1，u_2 が不定のまま整合性の条件は完全に満足されることになる．

5-3　一般拘束系における整合性条件

前節では整合性の条件から未定乗数が決定されてゆく過程や第 2 次拘束条件が導出される様子などを幾つかの具体例を用いて説明したが，本節では一般の拘束系における整合性の条件について議論を進める．

まず 1 階の微分 $(m = 1)$ から始めよう．第 1 次拘束条件を満足する部分多様体を Γ_0 とすれば式 (5-40) から

$$\frac{d\phi_j}{dt} \underset{\Gamma_0}{\approx} \frac{\partial\phi_j}{\partial t} + \{\phi_j, H\}_P + \sum_{k=1}^{K_1} u_k\{\phi_j, \phi_k\}_P \quad (j = 1 \sim K_1) \qquad (5-64)$$

を得る[1]．ここで K_1 次元のベクトル $\boldsymbol{\phi}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{u}$ と K_1 次の反対称行列 A を

$$[\boldsymbol{\phi}]_k \equiv \phi_k, \quad [\boldsymbol{h}]_k \equiv \frac{\partial\phi_k}{\partial t} + \{\phi_k, H\}_P, \quad [\boldsymbol{u}]_k \equiv u_k, \quad [A]_{jk} \equiv \{\phi_j, \phi_k\}_P \qquad (5-65)$$

で定義すれば，式 (5-64) は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi} \underset{\Gamma_0}{\approx} \boldsymbol{h} + A\boldsymbol{u} \qquad (5-66)$$

と書ける．従って，仮に A が可逆とすれば未定乗数を $\boldsymbol{u} = -A^{-1}\boldsymbol{h}$ と選ぶことによって式 (5-66) の右辺は恒等的に零となり，整合性の条件は完全に満足される．この場

1)　実は通常の等式の意味で成立するのであるが，後のことを考えて弱等式で表現しておく．

合には全ての未定乗数が確定し，第2次の拘束条件は全く現われない．

A が必ずしも可逆でない一般の場合を議論するため次の性質を利用しよう[1]．つまり，反対称行列 A のランクは偶数であり，これを 2ρ とすれば，K_1 次の可逆行列 V が存在して

$$A' \equiv VAV^t = \begin{pmatrix} J_{2\rho} & 0_{2\rho, K_1-2\rho} \\ 0_{K_1-2\rho, 2\rho} & 0_{K_1-2\rho, K_1-2\rho} \end{pmatrix} \qquad (5-67)$$

が成立する．ここで $J_{2\rho}$ は 2ρ 次の基本シンプレクティック行列である．$\{\phi_j, \phi_k\}_P$ を要素とする行列 A は正準変数 $\{q_n\}$，$\{p_n\}$ の関数であり，従って行列 V もまた正準変数の関数となる点に注意しよう．また，A のランクは Γ_0 内で一定であると仮定しているが，運動の連続性を考えれば決して無理な仮定ではない．

さて，式 $(5-66)$ の両辺に左から行列 V を乗じ，

$$V\frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi} = \frac{d}{dt}(V\boldsymbol{\phi}) - \frac{dV}{dt}\boldsymbol{\phi} \underset{\Gamma_0}{\approx} \frac{d}{dt}(V\boldsymbol{\phi})$$

が成立することを利用すれば[2]

$$\frac{d}{dt}(V\boldsymbol{\phi}) \underset{\Gamma_0}{\approx} V\boldsymbol{h} + VA\boldsymbol{u} = V\boldsymbol{h} + VAV^t(V^t)^{-1}\boldsymbol{u} \qquad (5-68)$$

を得る．それゆえ

$$\boldsymbol{\phi}' \equiv V\boldsymbol{\phi}, \quad \boldsymbol{h}' \equiv V\boldsymbol{h}, \quad \boldsymbol{u}' \equiv (V^t)^{-1}\boldsymbol{u} \qquad (5-69)$$

を定義すれば式 $(5-68)$ は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi}' \underset{\Gamma_0}{\approx} \boldsymbol{h}' + A'\boldsymbol{u}' \qquad (5-70)$$

と表現でき，式 $(5-66)$ と同じ形式になる．実は第1次拘束条件 $(5-35)$ を等価な条件

$$\phi'_k(p,q,t) \equiv \sum_{l=1}^{K_1}[V(p,q,t)]_{kl}\phi_l(p,q,t) = 0 \quad (k = 1 \sim K_1) \qquad (5-71)$$

に置き換えれば

$$\frac{\partial \phi'_k}{\partial t} + \{\phi'_k, H\}_P = \frac{\partial}{\partial t}\sum_{m=1}^{K_1}[V]_{km}\phi_m + \left\{\sum_{m=1}^{K_1}[V]_{km}\phi_m, H\right\}_P$$

$$\underset{\Gamma_0}{\approx} \sum_{m=1}^{K_1}[V]_{km}\frac{\partial \phi_m}{\partial t} + \sum_{m=1}^{K_1}[V]_{km}\{\phi_m, H\}_P$$

---

1) 例えば，伊理正男：『線形代数 I』(岩波講座応用数学)，岩波書店 (1993)，74ページ．
2) これは通常の等号では成立しない．式 $(5-64)$ で弱等号を使ったのはこのためである．

$$= \sum_{m=1}^{K_1} [V]_{km} h_m = [V\boldsymbol{h}]_k = [\boldsymbol{h}']_k$$

$$\{\phi'_j, \phi'_k\}_P = \sum_{l,m=1}^{K_1} \{[V]_{jl}\phi_l, [V]_{km}\phi_m\}_P$$

$$\underset{\Gamma_0}{\approx} \sum_{l,m=1}^{K_1} [V]_{jl}\{\phi_l, \phi_m\}_P [V]_{km} = [VAV^t]_{jk} = [A']_{jk}$$

が成立するから，式 (5-66) の変わりに式 (5-70) を得ることになる．そこで，第1次拘束条件としては始めから式 (5-71) を選んであったものとし，$\boldsymbol{\phi}'$，$\boldsymbol{h}'$，$\boldsymbol{u}'$ を改めて $\boldsymbol{\phi}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{u}$ と記すことにしよう．すると式 (5-67) から

$$\{\phi_j, \phi_k\}_P \underset{\Gamma_0}{\approx} [A']_{jk} = 0 \quad (j = 1 \sim K_1; k = 2\rho + 1 \sim K_1) \tag{5-72}$$

が成立し，K_1 次元のベクトル $\boldsymbol{\phi}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{u}$ を分割表現して

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{2\rho} \\ \boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}_{2\rho} \\ \boldsymbol{h}_{K_1-2\rho} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{2\rho} \\ \boldsymbol{u}_{K_1-2\rho} \end{pmatrix} \tag{5-73}$$

とすれば (添字は各部分ベクトルの次元を表わす)，式 (5-70) は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi}_{2\rho} \underset{\Gamma_0}{\approx} \boldsymbol{h}_{2\rho} + J_{2\rho}\boldsymbol{u}_{2\rho} \tag{5-74a}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho} \underset{\Gamma_0}{\approx} \boldsymbol{h}_{K_1-2\rho} \tag{5-74b}$$

と書けることが分かる．従って，2ρ 個の未定乗数 $\boldsymbol{u}_{2\rho}$ を

$$\boldsymbol{h}_{2\rho} + J_{2\rho}\boldsymbol{u}_{2\rho} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{u}_{2\rho} = -J_{2\rho}^{-1}\boldsymbol{h}_{2\rho} = J_{2\rho}\boldsymbol{h}_{2\rho} \tag{5-75}$$

と設定すれば式 (5-74a) の右辺は Γ_0 上で恒等的に零となり，$\boldsymbol{\phi}_{2\rho}$ に関する整合性条件は完全に満足される．後は $\boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho}$ に関する整合性条件だが，仮に

$$\boldsymbol{h}_{K_1-2\rho} \underset{\Gamma_0}{\approx} \boldsymbol{0} \tag{5-76}$$

だとすれば，式 (5-74b) の右辺も Γ_0 上で恒等的に零となり，$\boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho}$ に関する整合性条件も完全に満足されるから，必要な作業は全て終了したことになる．この場合には $K_1 - 2\rho$ 個の未定乗数 $\boldsymbol{u}_{K_1-2\rho}$ は不定のまま残る．

一方，式 (5-76) が成立しない場合には $K_1 - 2\rho$ 個の条件式 $\boldsymbol{h}_{K_1-2\rho} = \boldsymbol{0}$ の中に第1次拘束条件とは独立な条件 (第2次拘束条件) が含まれていることになる．この新たな拘束条件の数を K_2 とし ($K_2 \leq K_1 - 2\rho$)，それらを

$$\chi_k(q,p,t)=0 \quad (k=1\sim K_2) \tag{5-77}$$

としよう．また，Γ_0 の中でこの条件を満足する多様体を Γ_1 と記す (Γ_1 の次元は $2N-K_1-K_2$)．第 1 次拘束条件の場合と同様に，式 (5-77) は代表点が移動しても常に満足される必要があり，これから整合性条件

$$\chi_k^{(m)}(q,p,t)\equiv\frac{d^m\chi_k}{dt^m}(q,p,t)=0 \quad (k=1\sim K_2,\quad m=0,1,2,\cdots) \tag{5-78}$$

が要求される．前述のように $\phi_{2\rho}$ に関する整合性条件は既に満足されているので，式 (5-78) が成立すれば本来の整合性条件式 (5-48) もまた満足されることになる．

では，式 (5-78) で $m=1$ の場合を考えよう．まず，全 Hamiltonian を

$$H_T=H_1+\sum_{k=2\rho+1}^{K_1}u_k\phi_k,\quad H_1\equiv H+\sum_{k=1}^{2\rho}u_k\phi_k \tag{5-79}$$

と表現しておく ($\boldsymbol{u}_{2\rho}$ は確定しているので H_1 は既知関数)．すると，式 (5-64) を経て式 (5-66) が得られたように

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}\underset{\Gamma_1}{\approx}\boldsymbol{g}+B\boldsymbol{u}_{K_1-2\rho} \tag{5-80}$$

が導かれる[1]．ただし K_2 次元のベクトル $\boldsymbol{\chi}$，$\boldsymbol{g}$ と $K_2\times(K_1-2\rho)$ 行列 B は

$$[\boldsymbol{\chi}]_k\equiv\chi_k,\quad [\boldsymbol{g}]_k\equiv\frac{\partial\chi_k}{\partial t}+\{\chi_k,H_1\}_P,\quad [B]_{jk}\equiv\{\chi_j,\phi_k\}_P \tag{5-81}$$

によって定義される．ここで，K_2 次の可逆行列 P，$(K_1-2\rho)$ 次の可逆行列 Q を適当に選べば

$$B'=PBQ^t=\begin{pmatrix} I_{R_1} & 0_{R_1,K_1-2\rho-R_1} \\ 0_{K_2-R_1,R_1} & 0_{K_2-R_1,K_1-2\rho-R_1}\end{pmatrix},\quad R_1\equiv\mathrm{Rank}(B) \tag{5-82}$$

とできることに注意しよう[2]．式 (5-80) の左から P を作用させ

$$P\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}\underset{\Gamma_1}{\approx}\frac{d}{dt}(P\boldsymbol{\chi})-\frac{dP}{dt}\boldsymbol{\chi}\underset{\Gamma_1}{\approx}\frac{d}{dt}(P\boldsymbol{\chi})$$

を利用すれば[3]，式 (5-80) は

1) ここでは後の都合を考えて Γ_1 における弱等号で表現したが，当然ながら式 (5-80) は Γ_0 における弱等号としても成立している．
2) 例えば，伊理正男：『線形代数 I』(岩波講座応用数学)，岩波書店 (1993)，56 ページ．
3) これは Γ_0 における弱等号としては成立しない．式 (5-80) を Γ_1 における弱等号で表現したのはこのためである．

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}' \underset{\Gamma_1}{\approx} \boldsymbol{g}' + B'\boldsymbol{u}'_{K_1-2\rho} \tag{5-83}$$

と表現できる．ただし

$$\boldsymbol{\chi}' \equiv P\boldsymbol{\chi}, \quad \boldsymbol{g}' \equiv P\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{\phi}'_{K_1-2\rho} \equiv Q\boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho}, \quad \boldsymbol{u}'_{K_1-2\rho} \equiv (Q^t)^{-1}\boldsymbol{u}_{K_1-2\rho} \tag{5-84}$$

である．式 (5-66) と式 (5-70) の関係を論じた場合と同様に，第1次拘束条件 (の一部) である $\boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho} = \boldsymbol{0}$ を等価な条件 $\boldsymbol{\phi}'_{K_1-2\rho} = \boldsymbol{0}$ で置き換え，式 (5-77) の第2次拘束条件 $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{0}$ を等価な条件 $\boldsymbol{\chi}' = \boldsymbol{0}$ で置き換えれば，式 (5-80) の代わりに式 (5-83) を得ることが示される．そこで拘束条件としては始めから $\boldsymbol{\phi}'_{K_1-2\rho} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\chi}' = \boldsymbol{0}$ を選んであったものとし，$\boldsymbol{\chi}'$，$\boldsymbol{g}'$，$\boldsymbol{\phi}'_{K_1-2\rho}$，$\boldsymbol{u}'_{K_1-2\rho}$ を改めて $\boldsymbol{\chi}$，$\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{\phi}_{K_1-2\rho}$，$\boldsymbol{u}_{K_1-2\rho}$ などと記そう．すると式 (5-82) から

$$\{\chi_j, \phi_k\}_P \underset{\Gamma_1}{\approx} [B']_{jk} = 0 \quad (j = 1 \sim K_2; k = 2\rho + R_1 + 1 \sim K_1) \tag{5-85}$$

が成立し，ベクトル $\boldsymbol{\chi}$，$\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{u}_{K_1-2\rho}$ を

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\chi}_{R_1} \\ \boldsymbol{\chi}_{K_2-R_1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_{R_1} \\ \boldsymbol{g}_{K_2-R_1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{u}_{K_1-2\rho} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_{R_1} \\ \boldsymbol{u}_{K_1-2\rho-R_1} \end{pmatrix} \tag{5-86}$$

と分割表現すれば，式 (5-83) は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}_{R_1} \underset{\Gamma_1}{\approx} \boldsymbol{g}_{R_1} + \boldsymbol{u}_{R_1} \tag{5-87a}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi}_{K_2-R_1} \underset{\Gamma_1}{\approx} \boldsymbol{g}_{K_2-R_1} \tag{5-87b}$$

と書けることが分かる．それゆえ，R_1 個の未定乗数 $\boldsymbol{u}_{R_1}$ を

$$\boldsymbol{g}_{R_1} + \boldsymbol{u}_{R_1} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{u}_{R_1} = -\boldsymbol{g}_{R_1} \tag{5-88}$$

と設定すれば式 (5-87a) の右辺が Γ_1 上で恒等的に零となり，$\boldsymbol{\chi}_{R_1}$ に関する整合性条件は完全に満足される．後は $\boldsymbol{\chi}_{K_2-R_1}$ に関する整合性条件だが，仮に

$$\boldsymbol{g}_{K_2-R_1} \underset{\Gamma_1}{\approx} \boldsymbol{0} \tag{5-89}$$

だとすれば，式 (5-87b) の右辺も Γ_1 上で恒等的に零となり，$\boldsymbol{\chi}_{K_2-R_1}$ に関する整合性の条件も満足されるから，必要な作業は全て終了したことになる．この場合には $(K_1 - 2\rho - R_1)$ 個の未定乗数 $\boldsymbol{u}_{K_1-2\rho-R_1}$ は不定のまま残る．

ここで式 (5-87)，(5-88)，(5-89) が，式 (5-74)，(5-75)，(5-76) の繰り返しになっている点に注意しよう．従って式 (5-89) が成立しない場合には新たな第

2次拘束条件が登場し，それらの整合性に関する議論が再び展開されることになる．しかし，代表点が運動すべき多様体 $\Gamma_2, \Gamma_3, \cdots$ の次元は繰り返しの度に確実に減少するため，こうした繰り返しが無限に続くことはありえない．つまり有限回の手続きで式 (5-89) に相当する条件が成立し，整合性条件が満足される最大の多様体 Γ が特定されることになる．

最終的に K_1 個の未定乗数のうちの K' 個 $\{u_k\}_{k=1\sim K'}$ が確定し，残りの (K_1-K') 個 $\{u_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ が不定のまま残ったとしよう．そして，全 Hamiltonian を

$$H_T = H' + \sum_{k=K'+1}^{K_1} u_k\phi_k, \quad H' \equiv H + \sum_{k=1}^{K'} u_k\phi_k \tag{5-90}$$

と書くことにする (H' は既知の関数)．また，合計して J 個の第2次拘束条件

$$\chi_j(q,p,t) = 0 \quad (j = 1 \sim J) \tag{5-91}$$

が生じたとする．ここで，第 1 次・第 2 次に関らず，拘束条件を規定する関数 $\{\phi_k\}$, $\{\chi_j\}$ を拘束条件量と呼ぶことにすれば[1)]，式(5-72)や式(5-85)から分かるように，これらの拘束条件量に関して

$$\begin{array}{ll} \{\phi_k, \phi_{k'}\}_P \underset{\Gamma}{\approx} 0 & (k = 1 \sim K_1) \\ \{\chi_j, \phi_{k'}\}_P \underset{\Gamma}{\approx} 0 & (j = 1 \sim J) \end{array} \quad (k' = K'+1 \sim K_1) \tag{5-92}$$

が成立する．つまり，最後まで不定のまま残る未定乗数 $\{u_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ を係数として全 Hamiltonian に寄与する $(K_1 - K')$ 個の拘束条件量 $\{\phi_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ は全ての拘束条件量と弱包合にある．ここで二つの物理量 F, G が $\{F,G\}_P = 0$ を満足すれば両者は包合にあるといい，$\{F,G\}_P \approx 0$ ならば弱包合にあるという．弱等式が成立する多様体 Γ を明示したければ「Γ 上で弱包合にある」と表現すれば良い．また，$\{\phi_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ のように全ての拘束条件量と弱抱合にある物理量を第1類 (first class) の量，それ以外の物理量を第2類 (second class) の量と呼び，第1類・第2類の量による拘束条件をそれぞれ第1類の拘束条件 (first class constraint)，第2類の拘束条件 (second class constraint) と呼ぶことにする[2)]．

さて，$\{\phi_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ が第 1 類の量であることは式(5-92)によって明らかだが，これ以外にも $\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ や $\{\chi_j\}_{j=1\sim J}$ の線形結合が第 1 類の量となる可能性が残っている．これを確認するため $K'+J$ 次の反対称行列

---

1) 「拘束関数」と名付けても良いのだが，正準変数と時間の関数は一般に「物理量」と称されるため「拘束条件量」と呼ぶことにする．

2) 次節で示される様に，拘束系の正準理論を展開する上では拘束条件に関する第1次・第2次という分類よりも第1類・第2類という分類が本質的である．

$$[C]_{mn} \equiv \{\xi_m, \xi_n\}_P, \quad \xi_n \equiv \begin{cases} \phi_n & (n = 1 \sim K') \\ \chi_{n-K'} & (n = K'+1 \sim K'+J) \end{cases} \tag{5-93}$$

を考える．式 (5-67) 以降の議論を参考にすれば分かるように，反対称行列 C のランクは偶数であり，これを 2σ とすれば

$$C' \equiv WCW^t = \begin{pmatrix} J_{2\sigma} & 0_{2\sigma, K'+J-2\sigma} \\ 0_{K'+J-2\sigma, 2\sigma} & 0_{K'+J-2\sigma, K'+J-2\sigma} \end{pmatrix} \tag{5-94}$$

となるような可逆行列 W が存在する．拘束条件量として $\{\xi_n\}_{n=1\sim K'+J}$ の代わりに

$$\xi'_n \equiv \sum_{m=1}^{K'+J} [W]_{nm} \xi_m \tag{5-95}$$

を採用すれば，$K' + J - 2\sigma$ 個の拘束条件量 $\{\xi'_n\}_{n=2\sigma+1\sim K'+J}$ は第 1 類である．一方，2σ 個の拘束条件量 $\{\xi'_n\}_{n=1\sim 2\sigma}$ は第 2 類であり，これらの如何なる線形結合も第 1 類にはなり得ない[1)]．こうして，第 1 次と第 2 次を合わせて $K_1 + J$ 個の拘束条件量は適当な線形変換によって $S_1 \equiv K_1 + J - 2\sigma$ 個の第 1 類拘束条件量

$$\psi_n \equiv \begin{cases} \phi_{K'+n} & (n = 1 \sim K_1 - K') \\ \xi'_{n-(K_1-K')+2\sigma} & (n = K_1 - K' + 1 \sim S_1) \end{cases} \tag{5-96}$$

と $S_2 \equiv 2\sigma$ 個の第 2 類の拘束条件量

$$\omega_n \equiv \xi'_n \quad (n = 1 \sim S_2) \tag{5-97}$$

とに分類できることになる．

5-4　第1類・第2類の拘束条件

式 (5-90) と式 (5-96) によれば全 Hamiltonian H_T は

$$H_T = H' + \sum_{n=1}^{K_1-K'} v_n \psi_n, \quad v_n \equiv u_{K'+n} \quad (n = 1 \sim K_1 - K') \tag{5-98}$$

と表現でき，整合性条件からは決まらない未定乗数 $\{v_n\}_{n=1\sim K_1-K'}$ を含む項は第 1 類の拘束条件量のみで記述される．一方，式 (5-93)〜(5-97) によれば $k = 1 \sim K'$ に対して

$$\phi_k = \xi_k = \sum_{n=1}^{K'+J} [W^{-1}]_{kn} \xi'_n$$

---

1)　全ての係数を零とした線形結合は除く．

$$= \sum_{n=1}^{S_2} [W^{-1}]_{kn} \omega_n + \sum_{n=S_2+1}^{K'+J} [W^{-1}]_{kn} \psi_{K_1-K'+n-S_2}$$

が成立し，確定部分 H' は

$$\left.\begin{aligned} H' &\equiv H + \sum_{k=1}^{K'} u_k \phi_k = H + \sum_{n=1}^{S_2} \alpha_n \omega_n + \sum_{n=S_2+1}^{K'+J} \beta_n \psi_{K_1-K'+n-S_2} \\ \alpha_n &\equiv \sum_{k=1}^{K'} u_k [W^{-1}]_{kn} \quad (n = 1 \sim S_2) \\ \beta_n &\equiv \sum_{k=1}^{K'} u_k [W^{-1}]_{kn} \quad (n = S_2 + 1 \sim K' + J) \end{aligned}\right\} \tag{5-99}$$

と表現される．従って，確定部分もまた第1類の拘束条件量に依存してしまう．ところで，第2類の拘束条件量は適当な工夫によって消去できることを次節で示すが，H' が第1類の拘束条件量を含まないとすればこの工夫によって H' を本来の H で置き換えられるため都合が良い．では，$\{\xi'_n\}$ と等価な別の拘束条件量を適当に選ぶことによって H' が第2類だけを含むようにできないであろうか．

この問題を議論する前に，第1類・第2類拘束条件量の幾何学的な意味，特に拘束条件で指定される多様体の接空間やその直交補空間について説明しておこう．対象とすべきは $2N$ 次元の位相空間に埋め込まれた $2N-S_1-S_2$ 次元の多様体 Γ であるが，簡単のため，先ずは3次元空間に埋め込まれた2次元多様体 (曲面) Σ を考える．Γ が S_1+S_2 個の拘束条件量 $\{\psi_j\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ によって規定されるように，曲面 Σ は1個の拘束条件量 ϕ によって決まるとする．つまり $\phi(\boldsymbol{r})=0$ を満足する点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)^t$ の集合が Σ である．

さて，Σ 上の点 $\boldsymbol{r}_P$ における Σ の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_P$，接平面を Π_P としよう．$\nabla\phi(\boldsymbol{r}_P) \neq \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{n}_P = \nabla\phi(\boldsymbol{r}_P)$ とできて便利だが，$\nabla\phi(\boldsymbol{r}_P) = \boldsymbol{0}$ の場合でも，$\boldsymbol{n}_P \neq \boldsymbol{0}$ が存在することは言うまでもない．ところで，$\boldsymbol{r}_P$ を始点とし，Π_P 上の点を終点とする矢印 (有向線分) の集合 T_P は通常の和とスカラ倍に関してベクトル空間であり，$\boldsymbol{r}_P$ における Σ の接空間と呼ばれる．一方，法線ベクトル $\boldsymbol{n}_P$ が張る1次元のベクトル空間 N_P は $\boldsymbol{r}_P$ における Σ の法空間と呼ばれる．接空間 T_P に属する任意のベクトルは法空間 N_P に属する任意のベクトルと直交し，また任意の3次元ベクトルは T_P に属するベクトルと N_P に属するベクトルとの和として一意的に表現できるから，T_P と N_P は互いに他の直交補空間である $(N_P = T_P^{\perp}, T_P = N_P^{\perp})$．また，$\boldsymbol{r}_P$ の近傍では接空間 T_P は多様体 Σ の良い近似になっている．つまり，微少量 ε に関

する2次以上の違いを無視すれば，T_P に属する任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $\boldsymbol{r}_P+\varepsilon\boldsymbol{v}$ は Σ 上の点であり，逆に Σ 上の点は全てこのように表現される．

続いて，ϕ 以外にもう一つの拘束条件量 ϕ' が与えられた場合を考える．$\phi'=0$ で決まる曲面を Σ' とし，二つの拘束条件を同時に満足する1次元の多様体 (曲線) を Γ と記す ($\Gamma=\Sigma\cap\Sigma'$)．Γ 上の点 $\boldsymbol{r}_P$ は Σ 上の点でもあり，Σ' 上の点でもあるから，それぞれに対する接平面 Π_P，Π'_P，接空間 T_P，T'_P，法線ベクトル $\boldsymbol{n}_P$，$\boldsymbol{n}'_P$，法空間 N_P，N'_P が決まる．$\boldsymbol{n}_P$ と $\boldsymbol{n}'_P$ が線形従属ならば Π_P と Π'_P は一致し，$\boldsymbol{r}_P$ の近傍では $\phi=0$ を満足する点は自動的に $\phi'=0$ を満足するから両者は独立な拘束条件ではない．逆に言えば，ϕ と ϕ' が独立な拘束条件を与えるためには $\boldsymbol{n}_P$ と $\boldsymbol{n}'_P$ は線形独立でなければならない．このとき Π_P と Π'_P の交線は $\boldsymbol{r}_P$ における Γ の接線 Λ_P となる．そして $\boldsymbol{r}_P$ における Γ の接空間 Γ_P が「$\boldsymbol{r}_P$ を始点とし，Λ_P 上の点を終点とする矢印の集合が作るベクトル空間」として定義され，法空間 V_P は Γ_P の直交補空間として定義される．すると，$\Lambda_P=\Pi_P\cap\Pi'_P$ であることから，$\Gamma_P=T_P\cap T'_P$ が導かれ，$\boldsymbol{n}_P$ と $\boldsymbol{n}'_P$ は共に V_P に属することが結論される ($\boldsymbol{v}\in\Gamma_P$ とすると $\boldsymbol{v}\in T_P$ だから $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{n}_P$ と直交し，$\boldsymbol{v}\in T'_P$ だから $\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{n}'_P$ とも直交する)．それゆえ，$\boldsymbol{n}_P$ と $\boldsymbol{n}'_P$ が張る空間である N_P と N'_P の直和空間 $N_P+N'_P$ は V_P に含まれることになるが[1]，$N_P+N'_P$ は V_P と同じく2次元のベクトル空間だから両者は一致する ($V_P=N_P+N'_P$)．ここで重要なのは「複数の拘束条件で規定される多様体 Γ の接空間 Γ_P や法空間 V_P が各々の拘束条件で規定される多様体の接空間や法空間の共通部分や直和として表現できる」という性質である．

では，$2N$ 次元の位相空間に S_1+S_2 個の拘束条件量 $\{\psi_j\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ が与えられた場合へと議論を進めよう．第1類の拘束条件量 ψ_j に対し $\psi_j=0$ によって決まる $2N-1$ 次元の多様体を Σ^j，Σ^j 上の点 $\boldsymbol{r}_P$ における Σ^j の接空間を T^j_P，法線ベクトルを $\boldsymbol{n}^j_P$，法空間を N^j_P とする[2]．N^j_P は $\boldsymbol{n}^j_P$ によって張られる1次元のベクトル空間である．同様に，第2類の拘束条件量 ω_k に対し $\omega_k=0$ によって決まる $2N-1$ 次元の多様体を $\overline{\Sigma}^k$，$\overline{\Sigma}^k$ 上の点 $\boldsymbol{r}_P$ における $\overline{\Sigma}^k$ の接空間を $\overline{T}^k_P$，法線ベクトルを $\overline{\boldsymbol{n}}^k_P$，法空間を $\overline{N}^k_P$ とする．3次元空間に関する上述の議論を一般化すれば，$\{\Sigma^j\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\overline{\Sigma}^k\}_{k=1\sim S_2}$ の共通部分として定義される多様体 Γ の点 $\boldsymbol{r}_P$ における接空間 Γ_P は $\{T^j_P\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\overline{T}^k_P\}_{k=1\sim S_2}$ の共通部分であり，法空間 V_P は互いに線形独立な S_1+S_2 個のベクトル $\{\boldsymbol{n}^j_P\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\overline{\boldsymbol{n}}^k_P\}_{k=1\sim S_2}$ が張る S_1+S_2 次元のベクトル空間であることが示される[3]．ところで $\nabla\psi_j$，$\nabla\omega_k$ が Γ 上で零ベクトルに

---

1) $\boldsymbol{v}\in N_P$，$\boldsymbol{v}'\in N'_P$ によって，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'$ と表現されるベクトルの集合はベクトル空間となるが，これを N_P と N'_P の直和空間といい，$N_P+N'_P$ と記す．

2) $\boldsymbol{r}_P$ は対応する正準変数 $\{q_n\}$，$\{p_n\}$ を並べて作った $2N$ 次元のベクトルである．

3) 互いに線形独立でなければ $\{\psi_j\}$，$\{\omega_k\}$ は独立な拘束条件量とはならない．

ならないとすれば，これらを法線ベクトル n_P^j，$\overline{n}_P^k$ として採用できて好都合である．そこで，これ以後は

$$\begin{cases} n_P^j = \nabla\psi_j(r_p) & (j = 1 \sim S_1) \\ \overline{n}_P^k = \nabla\omega_k(r_P) & (k = 1 \sim S_2) \end{cases} \qquad (r_P \in \Gamma) \tag{5-100}$$

を仮定して議論を進めることにしよう[1)].

さて，Γ 上で定数となる物理量の集合を C_Γ としよう (例えば拘束条件量 $\{\psi_j\}$, $\{\omega_k\}$ は全て C_Γ に属する)．それゆえ，点 r'_P が Γ 上にあれば C_Γ に属する任意の f に対して，$f(r'_P) = f(r_P)$ が成立する．ところが，微少量 ε に関する2次以上の誤差を無視すれば任意の $v \in \Gamma_P$ に対して $r'_P = r_P + \varepsilon v$ は Γ 上にあるから

$$0 = f(r_P + \varepsilon v) - f(r_P) = (\varepsilon v)^t \nabla f(r_P) \tag{5-101}$$

が成立する．つまり $\nabla f(r_P)$ は接空間の任意のベクトル v と直交し，従って法空間 V_P に属する．ところで，ψ_n が第1類であるという条件は式(5-100)によって

$$\begin{aligned} \{\psi_j, \psi_n\}_P &= (\nabla\psi_j)^t J_{2N} \nabla\psi_n = (n_P^j)^t J_{2N} \nabla\psi_n \underset{\Gamma}{\approx} 0, (j = 1 \sim S_1) \\ \{\omega_k, \psi_n\}_P &= (\nabla\omega_k)^t J_{2N} \nabla\psi_n = (\overline{n}_P^k)^t J_{2N} \nabla\psi_n \underset{\Gamma}{\approx} 0, (k = 1 \sim S_2) \end{aligned} \tag{5-102}$$

と書けるが，これはベクトル $J_{2N}\nabla\psi_n$ が $\{n_P^j\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\overline{n}_P^k\}_{k=1\sim S_2}$ と直交すること，つまり $J_{2N}\nabla\psi_n$ が接空間 Γ_P に属することを意味する．一方，$\nabla f(r_P)$ は法空間 V_P に属するベクトルだったから

$$\{f, \psi_n\}_P = (\nabla f)^t J_{2N} \nabla\psi_n \underset{\Gamma}{\approx} 0 \tag{5-103}$$

が成立する．弱等号を用いたのは点 P が Γ 上にあることを仮定して導かれた関係式だからである．式(5-103)によれば $\{f, \psi_n\}_P$ もまた C_Γ に属するが，この事実と Poisson 括弧に関する Jacobi の恒等式を使えば

$$\begin{aligned} 0 &= \{f, \{\psi_m, \psi_n\}_P\}_P + \{\psi_m, \{\psi_n, f\}_P\}_P + \{\psi_n, \{f, \psi_m\}_P\}_P \\ &\underset{\Gamma}{\approx} \{f, \{\psi_m, \psi_n\}_P\}_P \end{aligned} \tag{5-104}$$

が導かれる．このように $\{\psi_m, \psi_n\}_P$ は C_Γ に属する任意の物理量 f と，従って全ての拘束条件量と弱包合にあり，$\{\psi_m, \psi_n\}_P$ は第1類の量であることが結論される．実は $\{\psi_m, \psi_n\}_P$ は第1類の拘束条件量の線形結合で表わされ，

---

1) 式(5-100)が成立しない場合でも法線ベクトルに基づいて同様の議論ができるはずである．

$$\{\psi_m, \psi_n\}_P = \sum_{k=1}^{S_1} f^k_{m,n}\psi_k \quad (m, n = 1 \sim S_1) \tag{5-105}$$

と表現できることが示される[1)]．これは $\{\psi_n\}_{n=1\sim S_1}$ が Poisson 括弧を積としてLie代数を成し，$\{\psi_n\}_{n=1\sim S_1}$ を母関数とする正準変換がLie群を成すことを意味している．この点に関しては5–7節で議論する．

今度は第1類の拘束条件だけを満足する多様体 $\Gamma^{(1)}$，第2類の拘束条件だけを満足する多様体 $\Gamma^{(2)}$ を別々に考えよう．点 r_P における $\Gamma^{(1)}$，$\Gamma^{(2)}$ の法空間 $V_P^{(1)}$，$V_P^{(2)}$ はそれぞれ $\{\nabla\psi_j\}_{j=1\sim S_1}$，$\{\nabla\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ によって張られる S_1 次元，S_2 次元のベクトル空間である．また，以下の関係が成立することも容易に理解できるだろう．

$$\Gamma_P = V_P^{\perp} = (V_P^{(1)} + V_P^{(2)})^{\perp}, \quad \Gamma_P^{(1)} = V_P^{(1)\perp}, \quad \Gamma_P^{(2)} = V_P^{(2)\perp} \tag{5-106}$$

ところで，S_1 次の行列 S が可逆なら第1類の拘束条件量として $\{\psi_j\}_{j=1\sim S_1}$ の代わりに

$$\psi'_j \equiv \sum_{k=1}^{S_1}[S]_{jk}\psi_k \quad (j = 1 \sim S_1) \tag{5-107}$$

を使った場合でも多様体 $\Gamma^{(1)}$ は不変であり，接空間 $\Gamma_P^{(1)}$ もまた不変である (S はq，p に依存しても良い)．この事実は

$$\nabla\psi'_j = \sum_{k=1}^{S_1}\{\nabla[S]_{jk})\psi_k + [S]_{jk}(\nabla\psi_k)\} \underset{\Gamma^{(1)}}{\approx} \sum_{k=1}^{S_1}[S]_{jk}(\nabla\psi_k) \tag{5-108}$$

からも示される．なぜなら $\{\nabla\psi_j\}$ を可逆行列 S で変換した $\{\nabla\psi'_j\}$ は $\{\nabla\psi_j\}$ と同じベクトル空間 $V_P^{(1)}$ を張るからである．第 1 類に第 2 類を加えればもはや 1 類ではないため，第 1 類拘束条件量の選びかたとしては式(5－107)で尽きている．一方，第 2 類に第1類を加えても第 2 類だから，第 2 類拘束条件量として

$$\varphi_k \equiv \sum_{l=1}^{S_2}[T]_{kl}\omega_l + \sum_{j=1}^{S_1}[U]_{kj}\psi_j \quad (k = 1 \sim S_2) \tag{5-109}$$

を採用することも考えられる (T が可逆ならば $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ は互いに独立な第2類の拘束条件量である)．右辺第2項のために $\{\omega_k\}$ が全て零であっても φ_k が零になるとは限らず，従って $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ が全て零となる多様体 $\Gamma'^{(2)}$ は $\Gamma^{(2)}$ とは一致しない．つまり，第2類の拘束条件だけが満足される多様体 $\Gamma^{(2)}$ は拘束条件量の選び方に

1) 例えば，九後汰一郎：『ゲージ場の量子論I』(新物理シリーズ23)，培風館(1989)，147ページ．

依存するのである[1]．$\Gamma'^{(2)}$ と $\Gamma^{(2)}$ が一致しなければ，それらの接空間も異なるはずである．実際，式 (5-108) に対応して

$$\nabla\varphi_k \underset{\Gamma}{\approx} \sum_{l=1}^{S_2}[T]_{kl}(\nabla\omega_l) + \sum_{j=1}^{S_1}[U]_{kj}(\nabla\psi_j) \quad (k = 1 \sim S_2) \tag{5-110}$$

が成立するから，$\nabla\varphi_k$ は必ずしも $V_P^{(2)}$ には含まれない．従って $\{\nabla\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ が張る S_2 次元のベクトル空間 $V_P'^{(2)}$ は $V_P^{(2)}$ とは異なり，接空間 $\Gamma_P'^{(2)} = V_P'^{(2)\perp}$ もまた $\Gamma_P^{(2)} = V_P^{(2)\perp}$ とは一致しない．ただし，$V_P'^{(2)} \neq V_P^{(2)}$ ではあっても

$$V_P = V_P^{(1)} + V_P^{(2)} = V_P^{(1)} + V_P'^{(2)} \tag{5-111}$$

は成立する．逆に，式 (5-111) を満足する第 2 類の拘束条件量 $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ は $\{\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ と同等の機能を持つことが理解できるだろう．都合の良いことに，Γ 上で零となる $S_2 - K'$ 個の物理量 $\{\eta_k\}_{k=K'+1\sim S_2}$ を適当に選べば

$$\varphi_k \equiv \begin{cases} \phi_k & (k = 1 \sim K') \\ \eta_k & (k = K'+1 \sim S_2) \end{cases} \tag{5-112}$$

が式 (5-111) を満足するようにできる．証明は以下に示すが，このような $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ を採用すれば全 Hamiltonian の確定部分は第 2 類の拘束条件量のみを使って

$$H' \equiv H + \sum_{k=1}^{K'} u_k\phi_k = H + \sum_{k=1}^{K'} u_k\varphi_k \tag{5-113}$$

と書けるから，本節の最初に提示した問題に解答が与えられたことになる．

まず，前節で議論したように K' 個の未定乗数 $\{u_n\}_{n=1\sim K'}$ は整合性の条件，すなわち代表点が運動方程式に従って移動しても第 1 次・第 2 次拘束条件が常に満足されるという条件から一意的に決定される点に注意しよう．つまり，

$$\begin{aligned} \dot\phi_k &= \frac{\partial\phi_k}{\partial t} + \{\phi_k, H\}_P + \sum_{n=1}^{K'} u_n\{\phi_k, \phi_n\}_P \underset{\Gamma}{\approx} 0 \quad (k = 1\sim K_1) \\ \dot\chi_j &= \frac{\partial\chi_j}{\partial t} + \{\chi_j, H\}_P + \sum_{n=1}^{K'} u_n\{\chi_j, \phi_n\}_P \underset{\Gamma}{\approx} 0 \quad (j = 1\sim J) \end{aligned} \tag{5-114}$$

を満足する $\{u_n\}_{n=1\sim K'}$ が存在し，一意的でなければならない．ここで，上式右辺の和記号の上限は本来は K_1 までだが，$\{\phi_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ が第 1 類であることから K'

1) 一方，全ての拘束条件が満足される多様体 Γ，及び第 1 類の拘束条件だけが満足される多様体 $\Gamma^{(1)}$ は拘束条件量の選び方に依存せず一意的に決まる．

までの和で置き換えられる点に注意しよう．また，同じ理由から $\{\dot{\phi}\}_{n=K'+1\sim K_1}$ に対する表式は $\{u_n\}_{n=1\sim K'}$ の決定には関与しない．それゆえ $\{u_n\}_{n=1\sim K'}$ を規定する方程式は

$$[h]_k \equiv \frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \{\phi_k, H\}_P, \quad [C_{\phi\phi}]_{kn} \equiv \{\phi_k, \phi_n\}_P, \quad [u]_n = u_n$$
$$[g]_j \equiv \frac{\partial \chi_j}{\partial t} + \{\chi_j, H\}_P, \quad [C_{\chi\phi}]_{jn} \equiv \{\chi_j, \phi_n\}_P \tag{5-115}$$

を使って

$$\begin{array}{l} h + C_{\phi\phi} u \underset{\Gamma}{\approx} 0 \\ g + C_{\chi\phi} u \underset{\Gamma}{\approx} 0 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} + Du \underset{\Gamma}{\approx} 0, \quad D \equiv \begin{pmatrix} C_{\phi\phi} \\ C_{\chi\phi} \end{pmatrix} \tag{5-116}$$

と表現できるが，式(5-116)が K' 次元ベクトル u に関して一意的な解を持つためには $(K'+J) \times K'$ 行列 D のランクが K' でなければならない．ここで，仮に ϕ_1 が第1類だったとすれば D の第1列は全て零となるため D のランクは高々 $K'-1$ となり，式(5-116)が一意的解を持つことに矛盾する．それゆえ，$\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ は全て第2類である．また，$\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ の代わりに可逆行列 Y による線形変換

$$\phi'_k \equiv \sum_{l=1}^{K'} [Y]_{kl} \phi_l \quad (k = 1 \sim K') \tag{5-117}$$

を使ったとすれば，式(5-116)の代りに

$$\begin{pmatrix} h' \\ g \end{pmatrix} + D'u' \underset{\Gamma}{\approx} 0, \quad h' = Yh, \quad u' = (Y^t)^{-1} u, \quad D' \equiv \begin{pmatrix} Y C_{\phi\phi} Y^t \\ C_{\chi\phi} Y^t \end{pmatrix} \tag{5-118}$$

を得るが，$\{\phi'_k\}$ の中に第1類があったとすれば上と同様の矛盾が生じる．こうして，$\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ の任意の線形結合もまた第2類であることが結論される．

さて，$\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ は C_Γ に属するから Γ 上の点 P における勾配 $\{\nabla\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ は全て V_P に属する．そして，V_P は $V_P^{(1)}$ と $V_P^{(2)}$ の直和だから

$$\nabla\phi_k = v_k^{(1)} + v_k^{(2)}, \quad v_k^{(1)} \in V_P^{(1)}, \quad v_k^{(2)} \in V_P^{(2)} \qquad (k = 1 \sim K') \tag{5-119}$$

と分解できる．ここで $\{v_k^{(2)}\}_{k=1\sim K'}$ が線形従属だとすれば，全てが零でない係数 $\{\alpha_k\}_{k=1\sim K'}$ を適当に選ぶことによって

$$\nabla\left(\sum_{k=1}^{K'}\alpha_k\phi_k\right)\underset{\Gamma}{\approx}\sum_{k=1}^{K'}\alpha_k\nabla\phi_k=\sum_{k=1}^{K'}\alpha_k\boldsymbol{v}_k^{(1)}+\sum_{k=1}^{K'}\alpha_k\boldsymbol{v}_k^{(2)}=\sum_{k=1}^{K'}\alpha_k\boldsymbol{v}_k^{(1)}\in V_P^{(1)} \tag{5-120}$$

とできるが，これは $\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ の任意の線形結合が第2類であることと矛盾する．従って，$\{\boldsymbol{v}_k^{(2)}\}_{k=1\sim K'}$ は互いに線形独立であり，$V_P^{(2)}$ に属する S_2-K' 個のベクトル $\{\boldsymbol{v}_k^{(2)}\}_{k=K'+1\sim S_2}$ を適当に選べば $\{\boldsymbol{v}_k^{(2)}\}_{k=1\sim S_2}$ が $V_P^{(2)}$ の基底をなすようにできる．このとき $\{\nabla\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ と $\{\boldsymbol{v}_k^{(2)}\}_{k=K'+1\sim S_2}$ が張る S_2 次元のベクトル空間を $V_P'^{(2)}$ とすれば式 (5-111) が成立することは明らかである．それゆえ

$$\nabla\eta_k=\boldsymbol{v}_k^{(2)}\quad(k=K'+1\sim S_2) \tag{5-121}$$

となるように第2類の拘束条件量 $\{\eta_k\}_{k=K'+1\sim S_2}$ を選べば[1)]，式 (5-112) で定義される $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ は式 (5-111) を満足するから，これらを第2類の拘束条件量として採用できることになる．

最後に，次式で定義される S_2 次の正方行列 Δ が可逆であることを示そう．

$$[\Delta]_{mn}\equiv\{\varphi_m,\varphi_n\}_P\quad(m,n=1\sim S_2) \tag{5-122}$$

まず．式 (5-102) が任意の $1\le n\le S_1$ に対して成立し，$\{\nabla\psi_n\}_{n=1\sim S_1}$ が $V_P^{(1)}$ を張ることから，$V_P^{(1)}$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}$ に対して $J_{2N}\boldsymbol{v}^{(1)}$ は $\{\nabla\psi_j\}$，$\{\nabla\omega_k\}$ の全てと直交することが分かる (つまり $J_{2N}\boldsymbol{v}^{(1)}\in\Gamma_P$)．ところで，定義によって

$$\begin{aligned}
&\nabla\varphi_k=\nabla\phi_k=\boldsymbol{v}_k^{(1)}+\boldsymbol{v}_k^{(2)}\quad(k=1\sim K')\\
&\nabla\varphi_k=\nabla\eta_k=\boldsymbol{v}_k^{(2)}\qquad\qquad(k=K'+1\sim S_2)\\
&\boldsymbol{v}_k^{(1)}\in V_p{}^{(1)},\quad \boldsymbol{v}_k^{(2)}\in V_p{}^{(2)}
\end{aligned} \tag{5-123}$$

と分解されるから，$J_{2N}\boldsymbol{v}_k^{(1)}\in\Gamma_P(k=1\sim K')$ によって

$$\begin{aligned}
\{\varphi_m,\varphi_n\}_P&=(\nabla\varphi_m)^tJ_{2N}\nabla\varphi_n\\
&=(\boldsymbol{v}_m^{(1)}+\boldsymbol{v}_m^{(2)})^tJ_{2N}(\boldsymbol{v}_n^{(1)}+\boldsymbol{v}_n^{(2)})=(\boldsymbol{v}_m^{(2)})^tJ_{2N}\boldsymbol{v}_n^{(2)}
\end{aligned} \tag{5-124}$$

が結論される．一方，$\{\boldsymbol{v}_k^{(2)}\}_{k=1\sim S_2}$ と同じく $\{\nabla\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ もまた $V_P^{(2)}$ を張るから

$$\boldsymbol{v}_k^{(2)}=\sum_{l=1}^{S_2}[Z]_{kl}\nabla\omega_l\quad(k=1\sim S_2) \tag{5-125}$$

---

1) これまでの議論では，$\boldsymbol{v}_k^{(2)}$ は Γ 上の各点毎に定義されるわけだが，必要な回数だけ微分可能な関数 $\{\eta_k\}_{k=K'+1\sim S_2}$ が存在して Γ 上の任意の点 P で式 (5-121) が成立するためには，点 P が Γ 上を動くのに伴って $\boldsymbol{v}_k^{(2)}$ が十分に滑らかに変化するように配慮しなければならない．

とすれば Z は可逆である．ところで，式 (5-94) と式 (5-97) によれば

$$\{\omega_k,\omega_l\}_P=\{\xi'_k,\xi'_l\}_P=[C']_{kl}=[J_{2\sigma}]_{kl}\quad (k,l=1\sim S_2) \tag{5-126}$$

となるので

$$\begin{aligned}[\Delta]_{mn}\equiv\{\varphi_m,\varphi_n\}_P=(\boldsymbol{v}_m^{(2)})^t J_{2N}\boldsymbol{v}_n^{(2)}&=\sum_{k,l=1}^{S_2}[Z]_{mk}[Z]_{nl}(\nabla\omega_k)^t J_{2N}\nabla\omega_l\\ &=\sum_{k,l=1}^{S_2}[Z]_{mk}\{\omega_k,\omega_l\}_P[Z^t]_{ln}\\ &=\sum_{k,l=1}^{S_2}[Z]_{mk}[J_{2\sigma}]_{kl}[Z^t]_{ln}=[ZJ_{2\sigma}Z^t]_{mn}\end{aligned}$$

すなわち

$$\Delta=ZJ_{2\sigma}Z^t \tag{5-127}$$

を得る．Z と $J_{2\sigma}$ が可逆だから Δ もまた可逆である．

5-5　Dirac 括弧

第2類の拘束条件量 φ_k を母関数とする無限小正準変換を考えよう．ε を無限小パラメータとすれば，正準変数は

$$\delta q_n=\varepsilon\{q_n,\varphi_k\}_P=\varepsilon\frac{\partial\phi_k}{\partial p_n},\quad \delta p_n=\varepsilon\{p_n,\varphi_k\}_P=-\varepsilon\frac{\partial\varphi_k}{\partial q_n} \tag{5-128}$$

だけ変化する．$\{q_n\}$，$\{p_n\}$ を並べて作った $2N$ 次元のベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすれば，代表点の位置 $\boldsymbol{r}$ が無限小正準変換によって

$$\delta\boldsymbol{r}=\varepsilon J_{2N}\nabla\varphi_k \tag{5-129}$$

だけ移動すると言っても良い．この代表点の移動による物理量 F の変化量 δF は

$$\begin{aligned}\delta F&=(\delta\boldsymbol{r})^t\nabla F=(\nabla F)^t\delta\boldsymbol{r}=(\nabla F)^t(\varepsilon J_{2N}\nabla\varphi_k)\\ &=\varepsilon(\nabla F)^t J_{2N}\nabla\varphi_k=\varepsilon\{F,\varphi_k\}_P\end{aligned} \tag{5-130}$$

として与えられるから，φ_k と包合にある物理量を別にすれば，この無限小変換によって F は値を変えることになる．しかし，この F に $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ の適当な線形結合を加えれば $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ の全てと弱包合にある物理量が作れる．実際

$$\{F+\sum_{n=1}^{S_2}f_n\varphi_n,\varphi_k\}_P\underset{\Gamma^{(2)}}{\approx}0\quad (k=1\sim S_2) \tag{5-131}$$

は $\{f_n\}_{n=1\sim S_2}$ に関する線形方程式となるが，$\{\varphi_m,\varphi_n\}$ を mn 要素とする S_2 次の正方行列 Δ が可逆であることから $\{f_n\}_{n=1\sim S_2}$ は一意的に決まり，その結果

$$F^* \equiv F - \sum_{m,n=1}^{S_2} \{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\varphi_n \tag{5-132}$$

を得る．F^* は $\Gamma^{(2)}$ 上で φ_k と弱包合だから，$\Gamma^{(2)}$ 上の点 $\boldsymbol{r}$ から出発した代表点は φ_k を母関数とする無限小正準変換によって F^* の等値面上 (F^* が一定の値を取る $2N-1$ 次元の多様体上) を動くことになる．

さて，代表点の実際の運動は全ての拘束条件が満足される多様体 Γ 上に制限されるから式 (5-132) の右辺第 2 項は常に零となり，観測に係る物理量としては F と F^* は全く区別できない点に注意しよう．もちろん F^* は Γ 以外でも定義され，そこでは F と一致するとは限らない．例えば，第 2 類の拘束条件量に対しては

$$\varphi_k^* = 0 \quad (k = 1 \sim S_2) \tag{5-133}$$

を得るが，これが弱等号ではなく通常の等号の意味で成立している点に注意しよう．φ_k^* は位相空間全体で零となっているのである．

ところで，任意の二つの物理量 F，G に対して

$$\{F^*,G\}_P \underset{\Gamma^{(2)}}{\approx} \{F,G^*\}_P \underset{\Gamma^{(2)}}{\approx} \{F^*,G^*\}_P \underset{\Gamma^{(2)}}{\approx} \{F,G\}_D \tag{5-134}$$

が成立する点に注意しよう[1)]．ただし $\{F,G\}_D$ は F，G に関する Dirac 括弧であり

$$\{F,G\}_D \equiv \{F,G\}_P - \sum_{m,n=1}^{S_2} \{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\}_P \tag{5-135}$$

として定義される．この Dirac 括弧は Poisson 括弧と類似の性質を持っており

$$\{A,B\}_D = -\{B,A\}_D \tag{5-136a}$$

$$\alpha \text{ が定数なら } \{\alpha,B\}_D = 0 \tag{5-136b}$$

$$\{A_1+A_2,B\}_D = \{A_1,B\}_D + \{A_2,B\}_D \tag{5-136c}$$

$$\{A_1A_2,B\}_D = A_1\{A_2,B\}_D + A_2\{A_1,B\}_D \tag{5-136d}$$

$$\{\{A,B\}_D,C\}_D + \{\{B,C\}_D,A\}_D + \{\{C,A\}_D,B\}_D = 0 \tag{5-136e}$$

1) 章末の演習問題 1 参照．

などが成立するが，これらは全て Poisson 括弧の対応する性質を使って簡単に証明できる．例えば，式 (5-136d) は次のように示される．

$$\begin{aligned}\{A_1A_2,B\}_D &= \{A_1A_2,B\}_P - \sum_{m,n}\{A_1A_2,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,B\}_P \\ &= A_1\{A_2,B\}_P + A_2\{A_1,B\}_P \\ &\qquad -\sum_{m,n}(A_1\{A_2,\varphi_m\}_P + A_2\{A_1,\varphi_m\}_P)[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,B\}_P \\ &= A_1\{A_2,B\}_D + A_2\{A_1,B\}_D\end{aligned}$$

周知のように，Poisson 括弧は正準変数の選び方に依存しない．つまり，$\{Q_n\}$，$\{P_n\}$ を任意の正準変数とすれば

$$\{F,G\}_P = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial q_n}\frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial G}{\partial q_n}\right) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_n}\frac{\partial G}{\partial P_n} - \frac{\partial F}{\partial P_n}\frac{\partial G}{\partial Q_n}\right)$$

が成立する．ところが，式 (5-135) に示されるように Dirac 括弧は Poisson 括弧のみを使って定義されているから[1)]，Dirac 括弧もまた正準変数の選び方に依存しない．ただし，$\Gamma^{(2)}$ が変化するように第2類の拘束条件量 $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ を変えた場合には，Dirac 括弧は変化するので注意しておこう．

ところで，代表点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の第 k 成分 r_k は $1 \le k \le N$ ならば q_k であり，$N+1 \le k \le 2N$ ならば p_{k-N} だから，正準変数の Poisson 括弧は

$$\begin{aligned}\{r_k,r_l\}_P &= \begin{cases} \{q_l,q_l\}_P = 0 & (k,l=1\sim N) \\ \{q_k,p_{l-N}\}_P = \delta_{k,l-N} & (k=1\sim N, l=N+1\sim 2N) \\ \{p_{k-N},q_l\}_P = -\delta_{k-N,l} & (k=N+1\sim 2N, l=1\sim N) \\ \{p_{k-N},p_{l-N}\}_P = 0 & (k,l=N+1\sim 2N) \end{cases} \\ &= [J_{2N}]_{kl}\end{aligned} \qquad (5-137)$$

として表現される．あるいは $\{r_k,r_l\}_P$ を kl 要素とする $2N$ 次の反対称行列を $\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^t\}_P$ と記せば，式 (5-137) は単に

$$\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^t\}_P = J_{2N} \qquad (5-138)$$

と表現できる．また，任意の物理量 F に対して $\{r_k,F\}_P$ を第 k 成分とする $2N$ 次元のベクトルを $\{\boldsymbol{r},F\}_P$ と記せば

$$\begin{aligned}&[\{\boldsymbol{r},F\}_P]_k \equiv \{r_k,F\}_P = (\nabla r_k)^t J_{2N}\nabla F = [J_{2N}\nabla F]_k \\ &\quad\rightarrow\quad \{\boldsymbol{r},F\}_P = J_{2N}\nabla F\end{aligned} \qquad (5-139)$$

---

1) 行列 Δ の成分も全て Poisson 括弧で定義されている点に注意．

が成立し (∇r_k は第 k 成分だけが 1 で他の成分は全て 0 である)

$$\{F,G\}_P = (\nabla F)^t J_{2N} \nabla G = (J_{2N}\nabla F)^t J_{2N}(J_{2N}\nabla G)$$
$$= (\{\boldsymbol{r},F\}_P)^t J_{2N}(\{\boldsymbol{r},G\}_P) \tag{5-140}$$

が導かれる ($J_{2N}^{-1} = J_{2N}^t = -J_{2N}$ を利用)．更に，$2N$ 次の正方行列 Θ を

$$\Theta \equiv -\sum_{m,n=1}^{S_2} (\{\boldsymbol{r},\varphi_m\}_P)[\Delta^{-1}]_{mn}(\{\boldsymbol{r},\varphi_n\}_P)^t$$
$$= J_{2N}\left[\sum_{m,n=1}^{S_2}(\nabla\varphi_m)[\Delta^{-1}]_{mn}(\nabla\varphi_n)^t\right] J_{2N} \tag{5-141}$$

で定義すれば式 (5-140) によって

$$\sum_{m,n=1}^{S_2} \{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\}_P$$
$$= \sum_{m,n=1}^{S_2} (\{\boldsymbol{r},F\}_P)^t J_{2N}\{\boldsymbol{r},\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\boldsymbol{r},\varphi_n\}_P^t J_{2N}\{\boldsymbol{r},G\}_P$$
$$= -(\{\boldsymbol{r},F\}_P)^t J_{2N}\Theta J_{2N}\{\boldsymbol{r},G\}_P = (\nabla F)^t\Theta\nabla G \tag{5-142}$$

が成立する．特に $F = r_k$，$G = r_l$ の場合は

$$\sum_{m,n=1}^{S_2} \{r_k,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,r_l\}_P = (\nabla r_k)^t\Theta\nabla r_l = [\Theta]_{kl}$$

となり，これから

$$\{r_k,r_l\}_D = \{r_k,r_l\}_P - \sum_{m,n=1}^{S_2}\{r_k,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,r_l\}_P$$
$$= [J_{2N}]_{kl} - [\Theta]_{kl} = [J_{2N}-\Theta]_{kl}$$

すなわち

$$\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^t\}_D = J_{2N} - \Theta \tag{5-143}$$

を得る．そして，式 (5-142) と (5-143) とからは

$$\{F,G\}_D = \{F,G\}_P - \sum_{m,n=1}^{S_2}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\}_P$$
$$= (\nabla F)^t J_{2N}\nabla G - (\nabla F)^t\Theta\nabla G$$
$$= (\nabla F)^t(J_{2N}-\Theta)\nabla G = (\nabla F)^t\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}^t\}_D\nabla G \tag{5-144}$$

が結論される．この結果が示すように，正準変数に対する Dirac 括弧 $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^t\}_D$ が与えられたとすれば，第2類の拘束条件量 $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ を知らなくとも任意の物理量に関する Dirac 括弧 $\{F, G\}_D$ が計算できるのである．

では，Poisson 括弧の代りに Dirac 括弧を使って正準方程式を記述することは可能であろうか．まず，整合性の条件から

$$\dot{\varphi}_k \underset{\Gamma}{\approx} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \{\varphi_k, H_T\}_P \underset{\Gamma}{\approx} 0 \quad \rightarrow \quad \{\varphi_k, H_T\}_P \underset{\Gamma}{\approx} -\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \tag{5-145}$$

が導かれるので，任意の物理量 F の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{F} &\underset{\Gamma}{\approx} \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_T\}_P \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_T\}_D + \textstyle\sum_{m,n}\{F, \varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n, H_T\}_P \\ &\underset{\Gamma}{\approx} \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_T\}_D - \textstyle\sum_{m,n}\{F, \varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \end{aligned} \tag{5-146}$$

として与えられる[1)]．このように，正準方程式を Dirac 括弧で記述すると $\{\partial\varphi_k/\partial t\}$ の線形結合が含まれることになるが，実際上は時間に陽に依存する拘束条件を扱うことは希である．そこで，特に断りがない限り全ての拘束条件が時間に陽に依存しない場合を考えることにしよう．この場合には

$$\dot{F} \underset{\Gamma}{\approx} \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H_T\}_D \tag{5-147}$$

が成立する．ここで全 Hamiltonian の確定部分 H' が式 (5-113) で与えられることから，式 (5-136) と式 (5-133)，(5-134) によって

$$\begin{aligned} \{F, H'\}_D &= \left\{F, H + \sum_{k=1}^{K'} u_k \varphi_k\right\}_D \\ &= \{F, H\}_D + \sum_{k=1}^{K'}[u_k\{F, \varphi_k\}_D + \varphi_k\{F, u_k\}_D] \\ &\underset{\Gamma^{(2)}}{\approx} \{F, H\}_D + \sum_{k=1}^{K'} u_k\{F, \varphi_k^*\}_P = \{F, H\}_D \end{aligned} \tag{5-148}$$

1) 式 (5-135) の右辺第2項を左辺に移項した公式を利用する．また，$\Gamma^{(2)}$ 上の弱等式が成立すれば Γ 上の弱等式もまた成立する点に注意しよう．

が結論される．それゆえ，式(5-98)から

$$\{F, H_T\}_D = \left\{F, H' + \sum_{n=1}^{K_1-K'} v_n\psi_n\right\}_D \underset{\Gamma}{\approx} \{F, H\}_D + \sum_{n=1}^{K_1-K'} v_n\{F, \psi_n\}_D$$

であり，これを式(5-147)に代入すれば

$$\dot{F} \underset{\Gamma}{\approx} \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}_D + \sum_{n=1}^{K_1-K'} v_n\{F, \psi_n\}_D \tag{5-149}$$

を得る．つまり，Dirac 括弧を利用することによって第2類の拘束条件量 $\{\varphi_k\}$ は消去されてしまう．上の議論から明らかなように，$\{\varphi_k\}$ が消去される根拠となったのは式(5-133)と式(5-134)であるが，次のように考えることもできる．

まず，式(5-125)に登場した S_2 次の可逆行列 Z を用いて

$$\tilde{\varphi}_k \equiv \sum_{l=1}^{S_2}[Z^{-1}]_{kl}\varphi_l \quad (k = 1 \sim S_2) \tag{5-150}$$

を定義すれば，$\{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1\sim S_2}$ は $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ と等価な第2類の拘束条件量の組となる．このとき，$\{\tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_l\}$ を kl 要素とする $S_2(=2\sigma)$ 次の反対称行列 $\tilde{\Delta}$ は式(5-127)によって

$$\tilde{\Delta} = Z^{-1}\Delta(Z^{-1})^t = Z^{-1}(ZJ_{2\sigma}Z^t)(Z^{-1})^t = J_{2\sigma} \tag{5-151}$$

となるが[1)]，これは

$$Q_n \equiv \tilde{\varphi}_n, \quad P_n \equiv \tilde{\varphi}_{n+\sigma} \quad (n = 1 \sim \sigma) \tag{5-152}$$

が正準変数の一部のように振る舞うこと，つまり

$$\{Q_m, P_n\}_P = \delta_{mn}, \quad \{Q_m, Q_n\}_P = \{P_m, P_n\}_P = 0 \quad (m, n = 1 \sim \sigma)$$

が成立することを意味している．それゆえ，これに適当な $2(N-\sigma)$ 個の物理量 $\{Q_n\}_{n=\sigma+1\sim N}$，$\{P_n\}_{n=\sigma+1\sim N}$ を付加して正準変数の完全な組 $\{Q_n\}_{n=1\sim N}$，$\{P_n\}_{n=1\sim N}$ を構成できることが理解できるだろう[2)]．では，この $\{Q_n\}$，$\{P_n\}$ を正準変数とし，$\{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1\sim S_2}$ を第2類の拘束条件量とした場合の Dirac 括弧を計算してみよう．まず，$\{Q_n\}$，$\{P_n\}$ を並べて作った $2N$ 次元のベクトルを $\boldsymbol{R}$ と記せば，式(5-151)を使って式(5-141)は

---

1) 第2類拘束条件の組として式(5-97)に定義される $\{\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ を使った場合でも $\{\omega_k, \omega_l\}_P$ を kl 要素とする行列は $J_{2\sigma}$ となるが，前節で説明したように $\{\omega_k\}_{k=1\sim S_2}$ を全て零とする多様体は $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ を全て零にする多様体とは異なる．

2) 例えば木村利栄，菅野礼司：「微分形式による解析力学」，マグロウヒル(1988)，162ページ．

$$\tilde{\Theta} \equiv -\sum_{m,n=1}^{S_2} (\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)[\tilde{\Delta}^{-1}]_{mn}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_n\}_P)^t$$

$$= \sum_{m,n=1}^{S_2} (\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)[J_{2\sigma}]_{mn}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_n\}_P)^t \tag{5-153}$$

と書ける ($J_{2\sigma}^{-1} = -J_{2\sigma}$ に注意)．ところが，

$$[J_{2\sigma}]_{mn} = \begin{cases} \delta_{m,n-\sigma} & (m = 1 \sim \sigma) \\ -\delta_{m-\sigma,n} & (m = \sigma + 1 \sim 2\sigma) \end{cases} \tag{5-154}$$

だから

$$\begin{aligned}
\tilde{\Theta} &= \sum_{m=1}^{\sigma}\sum_{n=1}^{2\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)[J_{2\sigma}]_{mn}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_n\}_P)^t \\
&\qquad + \sum_{m=\sigma+1}^{2\sigma}\sum_{n=1}^{2\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)[J_{2\sigma}]_{mn}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_n\}_P)^t \\
&= \sum_{m=1}^{\sigma}\sum_{n=1}^{2\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)\delta_{m,n-\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_n\}_P)^t \\
&\qquad - \sum_{m=\sigma+1}^{2\sigma}\sum_{n=1}^{2\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)\delta_{m-\sigma,n}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_n\}_P)^t \\
&= \sum_{m=1}^{\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P)^t \\
&\qquad - \sum_{m=\sigma+1}^{2\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_{m-\sigma}\}_P)^t \\
&= \sum_{m=1}^{\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P)^t \\
&\qquad - \sum_{m=1}^{\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P)(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)^t
\end{aligned}$$

と変形でき

$$\tilde{M} \equiv \sum_{m=1}^{\sigma}(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_m\}_P)(\{\boldsymbol{R}, \tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P)^t \tag{5-155}$$

を使って

$$\tilde{\Theta} = \tilde{M} - \tilde{M}^t \tag{5-156}$$

と書ける．ところで，$m=1\sim\sigma$ に対して $\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_m\}_P$ や $\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P$ の第 k 成分は

$$[\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_m\}_P]_k=\begin{cases}\{Q_k,Q_m\}_P=0 & (k=1\sim N)\\ \{P_{k-N},Q_m\}_P=-\delta_{k-N,m} & (k=N+1\sim 2N)\end{cases}$$
$$[\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P]_k=\begin{cases}\{Q_k,P_m\}_P=\delta_{k,m} & (k=1\sim N)\\ \{P_{k-N},P_m\}_P=0 & (k=N+1\sim 2N)\end{cases} \tag{5-157}$$

となるが，これらは単に

$$\begin{aligned}[\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_m\}_P]_k&=-\delta_{k-N,m}\\ [\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P]_k&=\delta_{k,m}\end{aligned}\qquad (k=1\sim 2N,m=1\sim\sigma) \tag{5-158}$$

と表現できる．それゆえ，式 (5-155) により

$$[\tilde{M}]_{kl}=\sum_{m=1}^{\sigma}[\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_m\}_P]_k[\{\boldsymbol{R},\tilde{\varphi}_{m+\sigma}\}_P]_l=-\sum_{m=1}^{\sigma}\delta_{k-N,m}\delta_{l,m}$$
$$=\begin{cases}-\delta_{k-N,l} & (l=1\sim\sigma)\\ 0 & (l=\sigma+1\sim 2N)\end{cases}$$

を得るが，これは

$$\tilde{M}=\begin{pmatrix}0_N & 0_N\\ -I_N^{\sigma} & 0_N\end{pmatrix},\quad I_N^{\sigma}\equiv\begin{pmatrix}I_\sigma & 0_\sigma\\ 0_\sigma & 0_\sigma\end{pmatrix} \tag{5-159}$$

を意味する．これを式 (5-156) に代入し，更には式 (5-143) を使えば

$$\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^t\}_D=J_{2N}-\tilde{\Theta}=\begin{pmatrix}0_N & I_N\\ -I_N & 0_N\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0_N & I_N^{\sigma}\\ -I_N^{\sigma} & 0_N\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0_N & \bar{I}_N^{\sigma}\\ -\bar{I}_N^{\sigma} & 0_N\end{pmatrix},\quad \bar{I}_N^{\sigma}\equiv\begin{pmatrix}0_\sigma & 0_\sigma\\ 0_\sigma & I_{N-\sigma}\end{pmatrix} \tag{5-160}$$

を得る．また，任意の物理量 F，G に対しては式 (5-144) から

$$\{F,G\}_D=(\nabla F)^t\{\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^t\}_D\nabla G=(\nabla F)^t\begin{pmatrix}0_N & \bar{I}_N^{\sigma}\\ -\bar{I}_N^{\sigma} & 0_N\end{pmatrix}\nabla G$$
$$=\sum_{n=\sigma+1}^{N}\left\{\frac{\partial F}{\partial Q_n}\frac{\partial G}{\partial P_n}-\frac{\partial F}{\partial P_n}\frac{\partial G}{\partial Q_n}\right\} \tag{5-161}$$

が結論される．つまり，Dirac 括弧とは第 2 類の拘束条件には拘束されない「自由な」正準変数 $\{Q_n\}_{n=\sigma+1\sim N}$，$\{P_n\}_{n=\sigma+1\sim N}$ によって定義される $2(N-\sigma)$ 次元の位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-\sigma)}$ における Poisson 括弧に他ならない．Dirac 括弧を利用することによっ

て第2類の拘束条件量が消去される理由はここにある[1].

5-6　余分な変数

まず，拘束条件の類の違いによって運動方程式の解がどのように異なるのか実例を使って調べてみよう．取り上げるのは式 (5-56) の Lagrangian で記述される系である．この系では式 (5-59) に示す二つの第1次拘束条件量 ϕ_1，ϕ_2 が登場するが，$c \neq 0$ ならどちらも第2類であって未定乗数 u_1，u_2 は確定し，第2次の拘束条件は生じない．一方，$c=0$ なら ϕ_1，ϕ_2 は共に第1類であって u_1，u_2 は不定のまま残り，第2次拘束条件量 $\chi = p_1^2$ もまた第1類である．このように Hamilton 形式では c が零か否かで系の性質が大きく異なるのだが，Lagrange 形式ではどうだろうか．

この系の Euler-Lagrange 方程式は c が零か否かに関らず

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2) - \dot{q}_2(\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2) = 0 \tag{5-162a}$$

$$\frac{d}{dt}[q_1(\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2)] - c\dot{q}_3 = 0 \tag{5-162b}$$

$$\frac{d}{dt}(cq_2) = 0 \tag{5-162c}$$

となる．ここで $c \neq 0$ なら式 (5-162c) によって $\dot{q}_2 = 0$ であり，式 (5-162a) によって $\ddot{q}_1 = 0$ が言える．それゆえα，β，γ を定数として $q_1 = \alpha t + \beta$，$q_2 = \gamma$ と書け，これを式 (5-162b) に代入すれば δ を定数として $q_3 = \alpha^2 t/c + \delta$ を得る．つまり

$$q_1 = \alpha t + \beta, \quad q_2 = \gamma, \quad q_3 = \alpha^2 t/c + \delta \quad (c \neq 0) \tag{5-163}$$

である．一方，$c=0$ ならば q_3，$\dot{q}_3$ は Euler-Lagrange 方程式には全く影響せず，式 (5-162c) は任意の q_2 に対して成立する．また，式 (5-162a) に q_1 を乗じて式 (5-162b) との差をとれば $\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2 = 0$ を得るので

$$q_1 = \alpha \exp(-f), \quad q_2 = f, \quad q_3 = g \quad (c=0) \tag{5-164}$$

が結論される．ここで α は任意の定数，f，g は任意の時間関数である．このように，c が零か否かに関らず Euler-Lagrange 方程式は共通であるが，解の性質は大きく異なることが分かる．

---

1) $\mathfrak{S}_{2N}$ の正準変数として $\{q_n\}$，$\{p_n\}$ を使った場合には $\mathfrak{S}_{2(N-\sigma)}$ に関する Poisson 括弧，すなわち $\mathfrak{S}_{2N}$ に関する Dirac 括弧は式 (5-144) の右辺で計算される．Dirac 括弧は正準変数の選び方に依存しないから，式 (5-161) の $\{F,G\}_D$ が式 (5-144) の $\{F,G\}_D$ と一致することは言うまでもない．

では Hamilton 形式で上の結果を検討してみよう．$c \neq 0$ の場合には全ての拘束条件量 ϕ_1，ϕ_2 は第2類だから前節で導入した Dirac 括弧を使っても良いわけだが，ここでは式 (5-47) に基づいて計算を進めよう．まず，式 (5-44)，(5-59)，(5-62) から

$$H_T = \frac{1}{2}p_1^2 + u_1\phi_1 + u_2\phi_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + c^{-1}p_1^2(p_3 - cq_2) \tag{5-165}$$

であり，式 (5-47) から

$$\dot{q}_1 \approx \{q_1, H_T\}_P = p_1 + 2p_1c^{-1}(p_3 - cq_2) \approx p_1$$

を得るが，同様にして

$$\begin{aligned} &\dot{q}_1 \approx p_1, \quad \dot{p}_1 \approx 0, \quad \dot{q}_2 \approx 0, \\ &\dot{p}_2 \approx p_1^2, \quad \dot{q}_3 \approx c^{-1}p_1^2, \quad \dot{p}_3 \approx 0 \end{aligned} \tag{5-166}$$

が導かれる．言うまでもないが，弱等号は式 (5-59) の二つの拘束条件が満足される多様体 Γ に関するものである．ここで Γ 上の点 $\boldsymbol{r}$ に位置する代表点が微小時間 dt 後に何処まで移動するのかを考えよう．Γ 上の点 $\boldsymbol{r}$ では式 (5-166) の弱等号は等号に置き換えられ，$\boldsymbol{r}$ における代表点の速度は

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3)^t = (p_1, 0, c^{-1}p_1^2, 0, p_1^2, 0)^t$$

と書ける．微小時間 dt 後には代表点は $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \dot{\boldsymbol{r}}dt$ に移動するが，整合性の条件によって $\boldsymbol{r}'$ もまた Γ 上に存在し，$\boldsymbol{r}'$ における代表点の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}'$ も式 (5-166) の弱等号を等号に置き換えて計算できる．こうした処理を繰り返せば代表点の軌跡が決定されるわけだが，代表点は常に Γ 上にあるため弱等号と等号との実質的な違いはない[1]．そして，弱等号を等号に置き換えれば式 (5-166) は通常の微分方程式であり，式 (5-59) の拘束条件を満足する解は α，β，γ，δ を定数として

$$\begin{aligned} &q_1 = \alpha t + \beta, \quad p_1 = \alpha, \quad q_2 = \gamma, \quad p_2 = \alpha(\alpha t + \beta), \\ &\quad q_3 = \alpha^2 t/c + \delta, \quad p_3 = c\gamma \end{aligned} \tag{5-167}$$

と書ける．一般解に4個の任意定数 α，β，γ，δ が含まれるのは拘束条件を満足する多様体 Γ が4次元だからであり，任意の初期値問題（Γ 上に任意に与えられた点を出発点とする代表点の軌跡を求める問題）が一意的な解を持つことに対応している．また，当然ながら式 (5-167) は q_1，q_2，q_3 に関して式 (5-163) と一致する．

---

1)　この例では式 (5-40) を使えば式 (5-166) の弱等号を等号で置き換えた形の結果を得る．しかし一般には式 (5-40) から得られる結果は煩雑であり，拘束条件を利用して簡単化するのが普通である．これは弱等式で記述することに他ならず，始めから式 (5-47) を使った方が楽である．

一方，$c=0$ の場合には第1次の拘束条件量 ϕ_1，ϕ_2 だけでなく第2次拘束条件量 $\chi=p_1^2$ もまた第1類であり，これらを

$$\psi_1 \equiv \phi_1 = q_1p_1 - p_2, \quad \psi_2 \equiv \phi_2 = p_3, \quad \psi_3 \equiv \chi = p_1^2 \tag{5-168}$$

と記せば式(5-105)に対応する関係式

$$\{\psi_1,\psi_2\}_P = 0, \quad \{\psi_2,\psi_3\}_P = 0, \quad \{\psi_3,\psi_1\}_P = -2\psi_3 \tag{5-169}$$

が成立する．式(5-98)に対応させて u_1，u_2 を v_1，v_2 と記し，全 Hamiltonian を

$$H_T = H + v_1\psi_1 + v_2\psi_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + v_1(q_1p_1 - p_2) + v_2p_3 \tag{5-170}$$

と表現すれば，式(5-47)によって

$$\dot{q}_1 \approx v_1q_1, \quad \dot{p}_1 \approx 0, \quad \dot{q}_2 \approx -v_1, \quad \dot{p}_2 \approx 0, \quad \dot{q}_3 \approx v_2, \quad \dot{p}_3 \approx 0 \tag{5-171}$$

を得るが[1)]，前述のように弱等号は等号と見做して良い．それゆえ

$$f(t) \equiv -\int^t d\tau v_1(q(\tau),p(\tau),\tau), \quad g(t) \equiv \int^t d\tau v_2(q(\tau),p(\tau),\tau) \tag{5-172}$$

とすれば，拘束条件を満足する式(5-171)の解は α を定数として

$$q_1 = \alpha\exp(-f), \quad p_1 = 0, \quad q_2 = f, \quad p_2 = 0, \quad q_3 = g, \quad p_3 = 0 \tag{5-173}$$

と書ける．v_1，v_2 が任意だから f，g は任意の時間関数と考えてよく，q_1，q_2，q_3 に関しては式(5-173)は式(5-164)と一致する．こうして，c が零か否かに関らず，Lagrange 形式と Hamilton 形式は同一の結果を与えることになる．

さて，$c=0$ の場合には拘束条件を満足する多様体 Γ は3次元だから一般解が3個の任意定数を含むだけで任意の初期値問題が解を持つはずだが，式(5-173)の解は1個の任意定数 α と2個の任意関数 f，g を含んでいる．そのため初期値問題には無数の解が存在することになる．実際，Γ 上の点 $r_0=(q_{10},q_{20},q_{30},0,0,0)^t$ を初期値（時刻 $t=t_0$ における位置）とする代表点の軌跡は $f(t_0)=q_{20}$，$g(t_0)=q_{30}$ を満足する任意の関数 f，g を使って式(5-173)で与えられる（ただし $\alpha=q_{10}\exp(q_{20})$）．

---

1) 例えば $\dot{q}_1 \approx \{q_1,H_T\}_P = p_1 + v_1q_1 \approx v_1q_1$，$\dot{p}_1 \approx \{p_1,H_T\}_P = -v_1p_1 \approx 0$ などと計算される．

では，初期値問題が無数の解を持つのは何故だろうか．まず，$c=0$ の場合の Lagrangian は

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1+q_1\dot{q}_2)^2 \tag{5-174}$$

であり，q_3 にも $\dot{q}_3$ にも依存しない点に注意しよう．つまり q_3 は対象とする系とは何の関係もない「余分な変数」である．q_3 が任意関数 g で表現されるのも当然と言えよう．一方，Lagrangian が $\dot{q}_2$ に依存しているにも係らず q_2 は任意関数 f で表現されている．何故だろうか．その理由を調べるため，系は作用積分

$$A=\int_{t_i}^{t_f} dtL(q_1,q_2,q_3,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dot{q}_3)=\int_{t_i}^{t_f} dt\frac{1}{2}(\dot{q}_1+q_1\dot{q}_2)^2 \tag{5-175}$$

を停留させる軌道 (停留軌道) に沿って動くことを思い出そう．ところが $q_3(t)$ の関数形をどのように変えても作用積分は変化しないから，停留軌道は一意的には決まらない．先程は q_3，$\dot{q}_3$ が Lagrangian に含まれないことを理由に q_3 は余分な変数であるとしたが，より一般に「作用積分の停留値に影響を与えない変数は余分な変数である」と考えても良いだろう．ところで，式(5-175)の作用積分の停留値は 0 であり[1)]，$\dot{q}_1+q_1\dot{q}_2=0$ を満足するように q_1，q_2 を変えても作用積分は 0 のままである．余分な変数を明確にしたければ一般化座標 α，β を導入して変数変換 $q_1=\alpha\exp(-\beta)$，$q_2=\beta$ とすれば良い．この変換によって Lagrangian は

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1+q_1\dot{q}_2)^2=\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\exp(-2\beta) \tag{5-176}$$

となり，作用積分の停留値は β の関数形に依らず 0 となる (停留条件は $\dot{\alpha}=0$)．従って β は余分な変数である．

Hamilton 形式でも q_3 や β が余分な変数であることに変わりはない．従って，例えば q_3 座標だけが異なる二つの点は物理的には等価である．あるいは，無限小の近傍に着目して「$\boldsymbol{dr}=(0,0,dq_3,0,0,0)^t$ だけ離れた位相空間内の2点 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{dr}$ は等価である」と表現しても良い．これを繰り返せば q_3 座標が有限量だけ異なる場合の結果が導けるからである．同様にして β が余分な変数であることから「dq_1，dq_2 が $dq_1+q_1dq_2=0$ を満足するならば，$\boldsymbol{dr}=(dq_1,dq_2,0,0,0,0)^t$ だけ離れた2点 $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{dr}$ は等価である」ことが結論される．興味深いことに式(5-168)で定義される第1類の拘束条件量 ψ_1，ψ_2 による無限小正準変換は

$$\boldsymbol{dr}=\varepsilon\{\boldsymbol{r},\psi_1\}_P=\varepsilon\{\boldsymbol{r},q_1p_1-p_2\}_P\underset{\Gamma}{\approx}(\varepsilon q_1,-\varepsilon,0,0,0,0)^t \tag{5-177a}$$

---

1) この系の Lagrangian は非負だから作用積分も非負となる．従って，停留値 (この場合は最小値) は0である．

$$dr = \varepsilon\{r, \psi_2\}_P = \varepsilon\{r, p_3\}_P = (0, 0, \varepsilon, 0, 0, 0)^t \tag{5-177b}$$

であり，何れも等価な点を結ぶ無限小正準変換となっている．また，ψ_3 に対しては

$$dr = \varepsilon\{r, \psi_3\}_P = \varepsilon\{r, p_1^2\}_P = (2\varepsilon p_1, 0, 0, 0, 0, 0)^t \underset{\Gamma}{\approx} (0, 0, 0, 0, 0, 0)^t$$

となり，これもまた等価な点 (実は同じ点) を結ぶ無限小変換である．それゆえ「第1類の拘束条件量を母関数とする無限小正準変換によって結ばれる点は物理的に等価である」と結論したくなるが，事実はそれほど単純ではない．例えば $\psi_3 = p_1^2$ の代りに $\tilde{\psi}_3 = p_1$ を選んだ場合を考えよう．両者は同じ拘束条件を与え，ψ_3 と同様に $\tilde{\psi}_3$ もまた第1類である．しかし $\tilde{\psi}_3$ を母関数とする無限小正準変換は $dr = \varepsilon\{r, \tilde{\psi}_3\}_P = (\varepsilon, 0, 0, 0, 0, 0)^t$ であり，等価な点を結ぶベクトルにはなっていない．どのような第1類拘束条件量ならば等価な点を結ぶ無限小正準変換を与えるのか，詳しくは次節で論議することにしよう．

さて，ここで対象としている系では多様体 Γ は全ての正準運動量が零であるような点の集合であり，q_1，q_2 を α，β で表現すれば，Γ 上の点は

$$r = (q_1, q_2, q_3, 0, 0, 0)^t = (\alpha \exp(-\beta), \beta, q_3, 0, 0, 0)^t \tag{5-178}$$

と書ける．α を固定して β，q_3 を変えれば r はある曲面上を動くが，この曲面を S_α と記そう．β だけを変えるには ψ_1 による無限小正準変換を繰り返せば良く，q_3 だけを変えるには ψ_2 による無限小正準変換を繰り返せば良い．それゆえ，S_α 上の点 $r_0 = (\alpha \exp(-\beta_0), \beta_0, q_{30}, 0, 0, 0)^t$ が与えられれば，ψ_1，ψ_2 による無限小正準変換を繰り返すことによって S_α 上の任意の点に至ることが可能である[1)]．ところで，β，q_3 は余分な変数だから S_α 上の点は互いに等価であり，物理的には S_α 全体を一つの点と見做すのが自然である．すると，Γ は一つのパラメータ α でラベル付けされた点 (実際には曲面) の集合，すなわち1次元の多様体となり，この1次元多様体では任意の初期値問題は一意的な解を持つことになる．

5-7　ゲージ変換とゲージ固定

正準変数 r の無限小正準変換が物理的に等価な点を結ぶとき，その無限小正準変換は無限小ゲージ変換と呼ばれる．また，無限小ゲージ変換が Γ 上で恒等変換でない場合，つまり Γ 上で $\{r, \psi_k\}_P = J_{2N}\nabla\psi_k \neq \mathbf{0}$ が成立する場合，この変換の自由度

---

1) 実際 $r = (\alpha \exp(-\beta), \beta, q_3, 0, 0, 0)^t$，$r_0 = (\alpha \exp(-\beta_0), \beta_0, q_{30}, 0, 0, 0)^t$ だったとすれば，先ずは ψ_2 を使って $r_1 = (\alpha \exp(-\beta_0), \beta_0, q_3, 0, 0, 0)^t$ まで動き，次いで ψ_1 を使って r まで移動すれば良い．次節で明らかになるように，一般論では式(5-169)に対する関係式が本質的に重要な役割を演ずる．

をゲージ自由度と呼ぶ．前節の例で言えば，第1類拘束条件量 ψ_1，ψ_2，ψ_3 は無限小ゲージ変換の母関数だが，ゲージ自由度を担うのは ψ_1，ψ_2 だけである．一方，$\tilde{\psi}_3$ は第1類拘束条件量ではあるが無限小ゲージ変換の母関数ではない．では，一般の拘束系で無限小ゲージ変換の母関数となる第1類の拘束条件量はどのように決定されるのだろうか．また，ゲージ自由度に伴う任意性を排除して代表点の軌跡を確定するにはどうすれば良いのだろうか．こうした疑問に答えるのが本節の目的である．

第1類の拘束条件量は S_1 個あるが，式(5-98)の全 Hamiltonian H_T に登場するのは $K_1 - K'$ 個の第1次拘束条件量 $\{\psi_k\}_{k=1\sim K_1-K'}$ である．任意の物理量 F の時間発展は式(5-47)で与えられ，時間に陽に依存しない正準変数に対しては

$$\dot{\boldsymbol{r}} \approx \{\boldsymbol{r}, H_T\}_P, \quad H_T = H' + \sum_{k=1}^{K_1-K'} v_k\psi_k \tag{5-179}$$

を得る．$\{v_k\}$ は整合性条件からは決定できない任意関数であり，前節の議論によれば「余分な変数」を反映している．初期値問題は $\{v_k\}$ の選び方に応じて無数の解を持つが，物理的には全ての解は等価である．

さて，任意関数 $\{v_k\}$ が初期値問題の解にどのように影響するのかを調べるため，v_i のみを δv_i だけ変えた場合に，つまり H_T を

$$H_T^{(i)} \equiv H_T + \delta v_i\psi_i \tag{5-180}$$

に変えた場合に，時刻 $t = t_0$ で Γ 上の点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ を通過する代表点の軌跡 $\boldsymbol{r}(t)$ がどれだけ変わるのか計算してみよう．H_T を $H_T^{(i)}$ に変えた場合の軌跡を $\boldsymbol{r}'(t)$ と記せば，τ に関する1次までの近似で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}'(t_0+\tau) &= \boldsymbol{r}'(t_0) + \dot{\boldsymbol{r}}'(t_0)\tau = \boldsymbol{r}_0 + \tau\{\boldsymbol{r}, H_T^{(i)}\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0} \\ &= \boldsymbol{r}_0 + \tau\{\boldsymbol{r}, H_T\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0} + \tau\{\boldsymbol{r}, \delta v_i\psi_i\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0} \\ &= \boldsymbol{r}(t_0+\tau) + \tau\delta v_i\{\boldsymbol{r}, \psi_i\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}\end{aligned}$$

が成立し，軌跡の変化は

$$\delta\boldsymbol{r}(t_0+\tau) \equiv \boldsymbol{r}'(t_0+\tau) - \boldsymbol{r}(t_0+\tau) = \tau\delta v_i\{\boldsymbol{r}, \psi_i\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$$

と書ける．ただし $\{\boldsymbol{r}, \psi_i\}|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$ は正準変数と時間の関数 $\{\boldsymbol{r}, \psi_i\}$ を $\boldsymbol{r}_0$，t_0 で評価した場合の値を意味する．また，$\boldsymbol{r}_0$ が Γ 上にあるため $\{\boldsymbol{r}, \delta v_i\psi_i\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0} = \delta v_i\{\boldsymbol{r}, \psi_i\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$ が成立することを利用した．ここで $\varepsilon = \tau\delta v_i$ を一定に保ちながら $\tau \to 0$ とすれば

$$\delta\boldsymbol{r}_0 \equiv \boldsymbol{r}'(t_0) - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}'_0 - \boldsymbol{r}_0 = \varepsilon\{\boldsymbol{r}, \psi_i\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}, \quad \boldsymbol{r}'_0 \equiv \boldsymbol{r}'(t_0) \tag{5-181}$$

が導かれ，ψ_i を母関数とする r の無限小正準変換 $\varepsilon\{r,\psi_i\}_P$ は物理的に等価な二点 r'_0，r_0 を結ぶことが分かる．それゆえ，第1次の第1類拘束条件量 $\{\psi_k\}_{k=1\sim K_1-K'}$ はゲージ変換の母関数である．

今度は H_T に含まれる任意関数 $\{v_k\}_{k=1\sim K_1-K'}$ の中から v_i，v_j を選び，時刻 t_0 から $t_0+\mu$ までは v_i のみを δv_i だけ変化させ，$t_0+\mu$ から $t_0+\mu+\nu$ までは v_j のみを δv_j だけ変化させた場合の軌跡を $r'(t)$ とする．一方，t_0 から $t_0+\nu$ までは v_j のみを δv_j だけ変化させ，$t_0+\nu$ から $t_0+\nu+\mu$ までは v_i のみを δv_i だけ変化させた場合の軌跡を $r''(t)$ とすれば，時刻 $t_1=t_0+\mu+\nu$ における両者の差 $\delta r(t_1)\equiv r''(t_1)-r'(t_1)$ は

$$\begin{aligned}\delta r(t_1) &= \mu\nu\{r,\{H_T+\delta v_i\psi_i, H_T+\delta v_j\psi_j\}_P\}_P|_{r_0,t_0}\\ &= \delta r_{t_1}^{(i)}-\delta r_{t_1}^{(j)}+\delta r_{t_1}^{(i,j)}\\ \delta r_{t_1}^{(i)} &\equiv \mu\nu\delta v_i\{r,\{\psi_i,H_T\}_P\}_P|_{r_0,t_0}\\ \delta r_{t_1}^{(j)} &\equiv \mu\nu\delta v_j\{r,\{\psi_j,H_T\}_P\}_P|_{r_0,t_0}\\ \delta r_{t_1}^{(i,j)} &\equiv \mu\nu\delta v_i\delta v_j\{r,\{\psi_i,\psi_j\}_P\}_P|_{r_0,t_0}\end{aligned}\tag{5-182}$$

として与えられる．まず $\delta v_i=0$ としてみよう．この場合には $\delta r(t_1)=-\delta r_{t_1}^{(j)}$ であり，$\varepsilon=\mu v\delta v_j$ を一定に保ちながら $\mu,\nu\to 0$ とすれば

$$\delta r_0\equiv\delta r(t_0)=-\varepsilon\{r,\{\psi_j,H_T\}_P\}_P|_{r_0,t_0}\tag{5-183}$$

を得る．一方 $\mu,\nu\to 0$ によって $r(t_1)$ は $r(t_0)=r_0$ に収束するから，$\{\psi_j,H_T\}_P$ を母関数とする r の無限小正準変換は r_0 と等価な点どうしを結ぶことになる．今度は $\mu\delta v_i=\nu\delta v_j=\sqrt{\varepsilon}$ とし，ε を一定に保ったまま $\mu,\nu\to 0$ としてみよう．すると

$$\delta r_0\equiv\delta r(t_0)=\varepsilon\{r,\{\psi_i,\psi_j\}_P\}_P|_{r_0,t_0}\tag{5-184}$$

を得るから ($\mu\nu\delta v_i\to 0$，$\mu\nu\delta v_j\to 0$ に注意)，$\{\psi_i,\psi_j\}_P$ を母関数とする r の無限小正準変換もまた r_0 と等価な点どうしを結ぶことになる．

さて，5–4節で示したように $\{\psi_i,\psi_j\}_P$ は第1類の拘束条件量であり $\{\psi_j\}$ の線形結合として式(5-105)のように展開できるが，以下に示すように $\{\psi_j,H_T\}_P$ もまた第1類の拘束条件量であり，

$$\{\psi_j,H_T\}_P=\sum_{k=1}^{S_1}h_{jk}\psi_k\quad(j=1\sim S_1)\tag{5-185}$$

と展開できることが分かる．まず，5–5節以降では拘束条件量 $\{\psi_j\}$，$\{\varphi_k\}$ は時間に

陽に依存しないことを仮定しているので，整合性条件から

$$\dot{\psi}_j \approx \{\psi_j, H_T\}_P \approx 0 \quad (j = 1 \sim S_1),$$
$$\dot{\varphi}_k \approx \{\varphi_k, H_T\}_P \approx 0 \quad (k = 1 \sim S_2) \qquad (5\text{-}186)$$

であり，$\{\psi_j, H_T\}_P$，$\{\varphi_k, H_T\}_P$ は Γ で定数 (零) となる．それゆえ式 (5-103) によって

$$\{\{\psi_j, H_T\}_P, \psi_n\}_P \approx 0, \quad \{\{\varphi_k, H_T\}_P, \psi_n\}_P \approx 0$$
$$(j, n = 1 \sim S_1, \quad k = 1 \sim S_2) \qquad (5\text{-}187)$$

を得る．一方，$\{\varphi_k, \psi_j\}_P \approx 0$ だから代表点が Γ 上を動いても $\{\varphi_k, \psi_j\}_P$ は零に留まり

$$0 = \frac{d}{dt}\{\varphi_k, \psi_j\}_P \approx \{\{\varphi_k, \psi_j\}_P, H_T\}_P \quad (j = 1 \sim S_1, \quad k = 1 \sim S_2) \qquad (5\text{-}188)$$

が成立する．ところが Jacobi の恒等式から

$$\{\{\psi_j, H_T\}_P, \varphi_k\}_P + \{\{H_T, \varphi_k\}_P, \psi_j\}_P + \{\{\varphi_k, \psi_j\}_P, H_T\}_P = 0$$

であり，これに式 (5-187)，(5-188) を適用すれば

$$\{\{\psi_j, H_T\}_P, \varphi_k\}_P \approx 0 \quad (j = 1 \sim S_1, \quad k = 1 \sim S_2) \qquad (5\text{-}189)$$

が結論される．式 (5-187)，(5-189) に示されるように $\{\psi_j, H_T\}_P$ は全ての拘束条件量 $\{\psi_j\}$，$\{\varphi_k\}$ と弱包合にあり，従って第 1 類の拘束条件量である．

再び第 1 次の第 1 類拘束条件量 $\{\psi_j\}_{j=1\sim K_1-K'}$ に議論を戻そう．上述のように，これらの拘束条件量から作られる物理量 $\{\psi_j, H_T\}_P$，$\{\psi_i, \psi_j\}_P$ はゲージ変換の母関数である．それゆえ，$\{w_j\}$，$\{w_{ij}\}$ を任意関数として

$$H_1 \equiv H_T + \sum_{1\le j\le K_1-K'} w_j\{\psi_j, H_T\}_P + \sum_{1\le i<j\le K_1-K'} w_{ij}\{\psi_i, \psi_j\}_P \qquad (5\text{-}190)$$

で定義される H_1 を H_T の代りに使ったとしても，$\dot{\boldsymbol{r}} \approx \{\boldsymbol{r}, H_1\}$ で決まる代表点の軌跡 $\boldsymbol{r}_1(t)$ は $\dot{\boldsymbol{r}} \approx \{\boldsymbol{r}, H_T\}_P$ で決まる軌跡 $\boldsymbol{r}(t)$ と物理的には等価である．何故なら各瞬間における $d\boldsymbol{r}_1$ と $d\boldsymbol{r}$ の差

$$d\boldsymbol{r}_1 - d\boldsymbol{r} \approx dt\{\boldsymbol{r}, H_1\} - dt\{\boldsymbol{r}, H_T\}$$

$$\approx \sum_{1\le j\le K_1-K'} w_j dt\{\boldsymbol{r},\{\psi_j,H_T\}_P\}_P+\sum_{1\le i<j\le K-K'} w_{ij}dt\{\boldsymbol{r},\{\psi_i,\psi_j\}_P\}_P$$

は物理的に等価な点を結ぶベクトルだからである．

さて，式 (5 - 185) や式 (5 - 105) を利用して $\{\psi_j,H_T\}_P$ や $\{\psi_i,\psi_j\}_P$ を $\{\psi_k\}_{k=1\sim S_1}$ で展開したとき（但し $1\le i,\ j\le K_1-K'$），2 次の量 $\{\psi_k\}_{k=K_1-K'+1\sim S_1}$ に対する展開係数が全て零ならば $\{w_j\}$，$\{w_{ij}\}$ を任意関数 $\{v_k\}$ に繰り込むことができ，H_1 は実質的に H_T である．しかし 2 次の量に対する展開係数の中に非零のものがあれば，H_1 は H_T よりも多くの拘束条件を含むことになる．その個数を N_1 としよう $(K_1-K'<N_1)$．このとき，必要に応じて $\{\psi_k\}$ の添字を付け替えれば

$$H_1=H'+\sum_{k=1}^{N_1}v_k\psi_k \tag{5-191}$$

と書ける．すると H_T が H_1 に，K_1-K' が N_1 に置き変わっただけで，式 (5 - 179) 以降の議論を繰り返すことができ，繰り返しの度に $H_2,H_3,\cdots$ に含まれる拘束条件量 $\{\psi_j\}$ の数は $N_2<N_3<\cdots$ と確実に増大する．しかし第 1 類の拘束条件量の数は有限（ S_1 個）だから，この繰り返しは有限回で終了する．その回数を G とすれば

$$\{\psi_j,H_T\}_P=\sum_{k=1}^{N_G}h_{jk}\psi_k,\quad \{\psi_i,\psi_j\}_P=\sum_{k=1}^{N_G}f^k_{i,j}\psi_k \quad (i,j=1\sim N_G) \tag{5-192}$$

が成立し，N_G 個の任意関数 $\{v_k\}_{k=1\sim N_G}$ を含んだ一般化 Hamiltonian H_G を

$$H_G=H'+\sum_{k=1}^{N_G}v_k\psi_k \tag{5-193}$$

で定義すれば，$\dot{\boldsymbol{r}}\approx\{\boldsymbol{r},H_G\}$ によって決まる代表点の軌跡 $\boldsymbol{r}_G(t)$ もまた $\dot{\boldsymbol{r}}\approx\{\boldsymbol{r},H_T\}_P$ で決まる軌跡 $\boldsymbol{r}(t)$ と物理的には等価である．それゆえ，式 (5 - 180) から式 (5 - 182) までの議論を繰り返せば分かるように $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ は無限小ゲージ変換の母関数である．ここで，式 (5 - 192) の H_T は H' に置き換えても良いことに注意しよう．なぜなら

$$\{\psi_j,H'\}_P=\sum_{k=1}^{N_G}h'_{jk}\psi_k,\quad \{\psi_i,\psi_j\}_P=\sum_{k=1}^{N_G}f^k_{i,j}\psi_k \quad (i,j=1\sim N_G) \tag{5-194}$$

が成立すれば

$$\{\psi_j, H_T\}_P = \{\psi_j, H'\}_P + \sum_{k=1}^{K_1-K'} [\{\psi_j, \psi_k\}_P v_k + \{\psi_j, v_k\}_P \psi_k]$$

$$= \sum_{k=1}^{N_G} h'_{jk}\psi_k + \sum_{k=1}^{K_1-K'} \left[v_k \sum_{l=1}^{N_G} f^l_{j,k}\psi_l + \{\psi_j, v_k\}_P \psi_k \right]$$

と書けるが，$K_1 - K' \leq N_G$ だから上式右辺は $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ の線形結合であり，ψ_k の係数を h_{jk} とすれば式 (5-192) を得るからである．結局，$\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ を決めるには第 1 次の拘束条件量 $\{\psi_k\}_{k=1\sim K_1-K'}$ から出発し，$\{\psi_j, H'\}_P$，$\{\psi_i, \psi_j\}_P$ の展開に必要な拘束条件量を順次に加えて行けばよい．もはや新たな拘束条件量が必要なくなれば，その時点までに必要となった拘束条件量が $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ である．

前節の例で具体的に計算してみよう．この系では式 (5-168) に示された拘束条件量 $\{\psi_k\}_{k=1\sim 3}$ は全て第 1 類であり，それらは式 (5-169) を満足する．また，$H' = H$ であり，第 1 次の量は ψ_1，ψ_2 の二つだから $\{\psi_1, H\}_P$，$\{\psi_2, H\}_P$ 及び $\{\psi_1, \psi_2\}_P$ が ψ_1 と ψ_2 だけで展開できれば $N_G = 2$ であるが，実際には

$$\{\psi_1, H'\}_P = \{\psi_1, H\}_P = \{q_1p_1 - p_2, p_1^2/2\}_P = p_1^2 = \psi_3$$

だから式 (5-194) が成立するためには $\{\psi_k\}_{k=1\sim 3}$ の全てが必要である．一方，$\psi_3 = p_1^2$ の代りに $\tilde{\psi}_3 = p_1$ を選んだ場合には

$$\{\psi_1, H'\}_P = p_1^2 = (\tilde{\psi}_3)^2 = \tilde{\psi}_3\tilde{\psi}_3 \tag{5-195}$$

となる．$\tilde{\psi}_3$ に関する展開係数が $\tilde{\psi}_3 \approx 0$ である点に注意しよう．この場合，式 (5-190) から式 (5-191) を得る過程を振り返ってみれば分かるように，$\tilde{\psi}_3$ を H_G に含めるべきではない．なぜなら，この例では式 (5-190) は

$$H_1 \equiv H_T + w_1\{\psi_1, H_T\}_P + w_2\{\psi_2, H_T\}_P + w_{12}\{\psi_1, \psi_2\}_P$$

$$= H' + v'_1\psi_1 + v'_2\psi_2 + w_1\{\psi_1, H'\}_P = H' + v'_1\psi_1 + v'_2\psi_2 + w_1\tilde{\psi}_3\tilde{\psi}_3$$

$$v'_1 \equiv v_1 + w_1\{\psi_1, v_1\}_P + w_2\{\psi_2, v_1\}_P,$$

$$v'_2 \equiv v_2 + w_1\{\psi_1, v_2\}_P + w_2\{\psi_2, v_2\}_P$$

と書けるが，これを式 (5-191) に対応する

$$H_1 = H' + v'_1\psi_1 + v'_2\psi_2 + v'_3\tilde{\psi}_3 \tag{5-196}$$

に書き換えた場合に v'_3 は任意関数ではあり得ず[1)]．$v'_3 = w_1\tilde{\psi}_3 \approx 0$ を満足しなけれ

---

1) 式 (5-191) では $\{w_j\}$，$\{w_{ij}\}$ を $\{v_k\}$ に繰り込んだものを改めて $\{v_k\}$ と記しているが，ここでは区別を容易にするため v'_1，v'_2，v'_3 としている．

ばならないからである．また，任意の物理量 F に対して

$$\{F, v_3'\tilde{\psi}_3\}_P = \{F, \tilde{\psi}_3\}_P v_3' + \{F, v_3'\}_P \tilde{\psi}_3 \approx 0$$

が成立するため式 (5-196) の右辺第3項は実質的に零であり，式 (5-195) の代わりに $\{\psi_1, H'\}_P = 0$ としても何の問題も生じない．一般に「$\{\psi_j, H'\}_P$，$\{\psi_i, \psi_j\}_P$ を $\{\psi_k\}$ で展開した場合の展開係数 h'_{jk}，$f^k_{i,j}$ が Γ 上で零ならば，その展開係数は恒等的に零であるとして良い」ことが理解できるだろう．今考えている例題では $\{\psi_2, H'\}_P = 0$，$\{\psi_1, \psi_2\}_P = 0$ だから ψ_1 と ψ_2 だけで式 (5-194) が成立し，従って $\tilde{\psi}_3$ はゲージ変換の母関数である必要はない．

さて，式 (5-193) の右辺に登場する N_G 個の関数 $\{v_k\}_{k=1\sim N_G}$ を任意に選んで一般化 Hamiltonian H_G を確定し，指定された初期条件の下に運動方程式 $\dot{\boldsymbol{r}} \approx \{\boldsymbol{r}, H_G\}$ を解けば代表点の軌跡が決まる．このように，代表点の軌跡を具体的に計算するには任意関数を特定の関数に固定する必要があるが，この操作をゲージの固定化と呼ぶ．同じ初期条件でも $\{v_k\}$ の選び方を変えれば異なる軌跡を得るが，上述のように物理的には全て等価である．ところで，全ての $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ がゲージ自由度を担う場合には N_G 個の付加的な拘束条件量 $\{\gamma_k\}_{k=1\sim N_G}$ を導入し，これらを介して $\{v_k\}$ を間接的に指定するという方法もある．$\{\psi_k\}$ の持つゲージ自由度を $\{\gamma_k\}$ によって拘束するのである．以下に示すように，この方法によれば第1類の拘束条件量 $\{\psi_k\}$ が第2類に転化し，Dirac 括弧を利用した理論的な解析が容易となる．

まず，$\boldsymbol{a}_k \equiv \{\boldsymbol{r}, \psi_k\}_P = J_{2N}\nabla\psi_k$ とすると Γ 上では $\boldsymbol{a}_k \neq \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{a}_k$ を法線方向とする超曲面 ($2N-1$ 次元の多様体) が定義できる点に注意しよう．そこで $\gamma_k = 0$ を満足する多様体がこの超曲面に一致し，Γ 上で $\nabla\gamma_k \neq \boldsymbol{0}$ となるように γ_k を選べば法線ベクトル $\nabla\gamma_k$ は $\boldsymbol{a}_k$ 方向を向き，α_k を非零のスカラとして $\nabla\gamma_k = \alpha_k \boldsymbol{a}_k$ と書ける．それゆえ N_G 個のベクトル $\{\boldsymbol{a}_k\}$ を横に並べて作った $2N$ 行 N_G 列の行列を A，$\{\alpha_k\}$ を対角成分とする N_G 次の対角行列を Λ とし，N_G 次の正方行列 C を $C \equiv \Lambda A^t A$ で定義すれば，その kl 要素は

$$\begin{aligned}[C]_{kl} &\equiv [\Lambda A^t A]_{kl} = (\alpha_k \boldsymbol{a}_k)^t \boldsymbol{a}_l = (\nabla\gamma_k)^t J_{2N} \nabla\psi_l \\ &= \{\gamma_k, \psi_l\}_P \quad (k, l = 1 \sim N_G)\end{aligned} \tag{5-197}$$

として与えられる．線形独立なベクトルの組 $\{\nabla\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ に可逆行列 J_{2N} を乗じて得られる $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1\sim N_G}$ もまた線形独立だから N_G 次の正方行列 $A^t A$ は可逆である．また，非零の要素から成る対角行列 Λ は可逆だから，行列 C もまた可逆である．従って $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ 自身は勿論のこと，それらの任意の線形結合も全て第2類であり，これを反映して全ての $\{v_k\}_{k=1\sim N_G}$ が確定する．つまり，$\{\psi_k\}_{k=1\sim S_1}$，$\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$

による拘束条件の他に付加的な拘束条件 $\{\gamma_k = 0\}_{k=1\sim N_G}$ をも満足する多様体を Γ_G とすれば，式(5-66)や式(5-80)と同様に付加的拘束条件に対する整合性の条件から

$$\frac{d}{dt}\gamma \underset{\Gamma_G}{\approx} \boldsymbol{f} + C\boldsymbol{v} \underset{\Gamma_G}{\approx} \boldsymbol{0},$$

$$[\gamma]_k \equiv \gamma_k, \quad [\boldsymbol{f}]_k \equiv \frac{\partial \gamma_k}{\partial t} + \{\gamma_k, H'\}_P \quad [\boldsymbol{v}]_k \equiv v_k \tag{5-198}$$

が要求されるが，上式の右辺に登場する C は式(5-197)で定義される行列であり，C は可逆だから任意関数は $\boldsymbol{v} = -C^{-1}\boldsymbol{f}$ として確定することになる．

ところで，前節の例題で第2次の拘束条件量として $\psi_3 = p_1^2$ を選んだ場合，ψ_3 は無限小ゲージ変換の母関数ではあるがゲージの自由度は担わない．この場合，任意の F と v_3 に対して $\{F, v_3\psi_3\}_P \approx 0$ が成立するため H_G から $v_3\psi_3$ を取り去っても実質的な変化はなく，どのような付加的拘束条件を設定しても ψ_3 は第1類であって整合性の条件から v_3 を決定することは不可能である．$\psi_3 = p_1^2$ の代りに $\tilde{\psi}_3 = p_1$ を選んだ場合には $\tilde{\psi}_3$ は無限小ゲージ変換の母関数ではなく，H_G には始めから含まれないことを考えれば，これは当然の結果と言えよう．

以上で拘束系の古典論に関する説明を終えるが，相当に込み入った議論が続いたことでもあり，これまでの議論を箇条書きにまとめておくことにしよう．

- Lagrangian の関数形から K_1 個の第1次拘束条件量 $\{\phi_k\}_{k=1\sim K_1}$ が決まり，Lagrange の未定乗数法によって K_1 個の任意関数 $\{u_k\}_{k=1\sim K_1}$ が導入される．
- 整合性条件から未定乗数のうち K' 個 $\{u_k\}_{k=1\sim K'}$ が確定し，J 個の第2次の拘束条件量 $\{\chi_j\}_{j=1\sim J}$ が導入される．不定のまま残る未定乗数を係数とする $K_1 - K'$ 個の第1次拘束条件量 $\{\phi_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ は第1類であり，それ以外の第1次拘束条件量 $\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ は第2類である．
- K' 個の第1次第2類拘束条件量 $\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ と J 個の第2次拘束条件量 $\{\chi_j\}_{j=1\sim J}$ の線形結合により $K'+J-2\sigma$ 個の第1類拘束条件量 $\{\xi'_n\}_{n=2\sigma+1\sim K'+J}$ と 2σ 個の第2類拘束条件量 $\{\xi'_n\}_{n=1\sim 2\sigma}$ とが構成される．
- 第1類拘束条件量は $\{\phi_k\}_{k=K'+1\sim K_1}$ と $\{\xi'_k\}_{k=2\sigma+1\sim K'+J}$ とを合わせて $S_1 = K_1 + J - 2\sigma$ 個が存在するが，それらをまとめて $\{\psi_k\}_{k=1\sim S_1}$ とする．また，第2類拘束条件量の組 $\{\xi'_n\}_{n=1\sim S_2}$ と等価で，第1次第2類拘束条件量 $\{\phi_k\}_{k=1\sim K'}$ を含むものが構成できるので，これを $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ と記す．
- 全 Hamiltonian は

$$H_T = H + \sum_{k=1}^{K_1} u_k\phi_k = H' + \sum_{k=1}^{K_1-K'} v_k\psi_k$$

$$H' = H + \sum_{k=1}^{K'} u_k \phi_k = H + \sum_{k=1}^{K'} u_k \varphi_k$$

$$\sum_{k=1}^{K_1-K'} v_k \psi_k = \sum_{k=K'+1}^{K_1} u_k \phi_k$$

と書ける．確定成分 H' は第2類拘束条件量のみを含み，それ以外の不確定成分は第1類拘束条件量のみを含む．

- ψ_i，ψ_j が第1類拘束条件量なら $\{\psi_j, H'\}_P$，$\{\psi_i, \psi_j\}_P$ もまた第1類の拘束条件量であり，$\{\psi_k\}_{k=1\sim S_1}$ の幾つかを使って展開できる．
- 第1次の第1類拘束条件量 $\{\psi_k\}_{k=1\sim K_1-K'}$ から出発し，$\{\psi_j, H'\}_P$，$\{\psi_i, \psi_j\}_P$ を展開するのに必要な第1類の拘束条件量を順次に加えて行けば，有限回の繰り返しによって新たな拘束条件量を必要としない段階に達する．その時点までに必要となった拘束条件量を $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ とするとき，系の時間発展は N_G 個の任意関数 $\{v_k\}_{k=1\sim N_G}$ を含む一般化 Hamiltonian $H_G = H' + \sum_{k=1}^{N_G} v_k \psi_k$ によって記述される．
- 一般化 Hamiltonian に含まれるすべての第1類拘束条件量 $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ がゲージ自由度を担う場合 N_G 個の物理量 $\{\gamma_k\}_{k=1\sim N_G}$ を適当に選べば $\{\gamma_k, \psi_l\}_P$ を kl 要素とする N_G 次の正方行列 C が可逆であるようにできる．それゆえ $\{\gamma_k\}_{k=1\sim N_G}$ を付加的な拘束条件量とすれば $\{\psi_k\}_{k=1\sim N_G}$ は第2類の拘束条件量に転化し，任意関数 $\{v_k\}_{k=1\sim N_G}$ は確定する．従って一般化 Hamiltonian も確定し，全ての拘束条件を満足する初期点から出発した代表点の運動は何の任意性もなく決まる．

5-8 Faddeev の経路積分

現実に問題とすべき拘束系では全ての第1類拘束条件量が一般化 Hamiltonian に含まれ，しかもゲージ自由度を担う場合がほとんどである．以後，このような拘束系に限って議論を進めよう．従って，一般化 Hamiltonian は

$$H_G = H' + \sum_{k=1}^{N_G} v_k \psi_k = H + \sum_{k=1}^{K'} u_k \varphi_k + \sum_{k=1}^{S_1} v_k \psi_k \tag{5-199}$$

と表現でき，$N_G = S_1$ 個の付加的な拘束条件量 $\{\gamma_k\}_{k=1\sim S_1}$ を導入することによって $\{\psi_k\}_{k=1\sim S_1}$ は全て第2類の拘束条件量となる．

ところで，$S_2 = 2\sigma$ 個の拘束条件量 $\{\varphi_k\}_{k=1\sim 2\sigma}$ は $\{\gamma_k\}$ を導入する以前から第2類であり，式 (5-150)，(5-152) に示すように可逆な線形変換によって σ 対の正準

変数 $\{Q_n\}$，$\{P_n\}_{n=1\sim\sigma}$ に変換される．従って拘束条件 $\{\varphi_k=0\}_{k=1\sim S_2}$ を課すことは代表点の運動を $\{Q_n\}$，$\{P_n\}_{n=\sigma+1\sim N}$ で座標付けされる $2(N-\sigma)$ 次元の位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-\sigma)}$ に制限することに他ならない．こうして全位相空間 $\mathfrak{S}_{2N}$ の中で $2S_1+S_2$ 個の拘束条件量 $\{\psi_k\}$，$\{\gamma_k\}$，$\{\varphi_k\}$ を考慮しながら式 (5-199) の一般化 Hamiltonian による系の時間発展を決める問題は，制限された位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-\sigma)}$ の中で $2S_1$ 個の拘束条件量 $\{\psi_k\}$，$\{\gamma_k\}$ を考慮しながら一般化 Hamiltonian

$$H_G=H+\sum_{k=1}^{S_1}v_k\psi_k \tag{5-200}$$

による系の時間発展を決める問題に帰着される．ところが $2S_1$ 個の拘束条件量 $\{\psi_k\}$，$\{\gamma_k\}$ もまた第 2 類だから，可逆な線形変換によって $\mathfrak{S}_{2(N-\sigma)}$ 内の S_1 対の正準変数 $\{Q_k\}$，$\{P_k\}_{k=\sigma+1\sim\sigma+S_1}$ に変換される．以後，何度も登場することになるので

$$N_c\equiv S_1+\sigma \qquad \text{(全拘束条件数の 1/2)} \tag{5-201}$$

を定義しておこう．拘束条件 $\{\psi_k=\gamma_k=0\}_{k=1\sim S_1}$ を課すことは代表点の運動を正準変数 $\{Q_n\}$，$\{P_n\}_{n=N_c+1\sim N}$ で座標付けされる $2(N-N_c)$ 次元の位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ に制限することに他ならない．この制限された位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ では拘束条件は存在せず，一般化 Hamiltonian は元々の Hamiltonian に一致する ($H_G=H$).

さて，拘束条件量 $\{\psi_k\}$，$\{\gamma_k\}$，$\{\varphi_k\}$ が時間に陽に依存しないことから $\{q_n\}$，$\{p_n\}_{n=1\sim N}$ と $\{Q_n\}$，$\{P_n\}_{n=1\sim N}$ とを対応付ける正準変換も時間には依存せず

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}) \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{cases} \tag{5-202}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}$ や $\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{P}$ は正準変数を成分とするベクトルであり，

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}\equiv(q_1,\cdots,q_N)^t \\ \boldsymbol{p}\equiv(p_1,\cdots,p_N)^t \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}\equiv(Q_1,\cdots,Q_N)^t \\ \boldsymbol{P}\equiv(P_1,\cdots,P_N)^t \end{cases} \tag{5-203}$$

として定義される．あるいは

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q}'\equiv(Q_1,\cdots,Q_{N_c})^t \\ \boldsymbol{P}'\equiv(P_1,\cdots,P_{N_c})^t \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}^*\equiv(Q_{N_c+1},\cdots,Q_N)^t \\ \boldsymbol{P}^*\equiv(P_{N_c+1},\cdots,P_N)^t \end{cases} \tag{5-204}$$

を使って，式 (5-202) を

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{Q}',\boldsymbol{Q}^*,\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}^*) \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{Q}',\boldsymbol{Q}^*,\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}^*) \end{cases},\quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{P}'=\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{cases}\quad \begin{cases} \boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{Q}^*(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{P}^*(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{cases} \tag{5-205}$$

と表現することもできる．

上述のように $\{\varphi_k\}_{k=1\sim S_2}$ と $\{Q_n\},\{P_n\}_{n=1\sim\sigma}$, $\{\psi_k\},\{\gamma_k\}_{k=1\sim S_1}$ と $\{Q_k\}$, $\{P_k\}_{k=\sigma+1\sim\sigma+S_1}$ はそれぞれ可逆な線形変換で結ばれるので，$2N_c$ 個の拘束条件量 $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$, $\{\gamma_k\}$ を一まとめにし，改めて $\{\chi_k\}_{k=1\sim 2N_c}$ と記せば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}' &\equiv \begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}'\\ \boldsymbol{P}'\end{pmatrix} = T\boldsymbol{\chi}\\ \boldsymbol{\chi} &\equiv (\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{2N_c})^t\\ &= (\varphi_1,\cdots,\varphi_{2\sigma},\psi_1,\cdots,\psi_{S_1},\gamma_1,\cdots,\gamma_{S_1})^t\end{aligned} \tag{5-206}$$

と表現できる．T が $2N_c$ 次の可逆な正方行列であることは言うまでもない．拘束条件は単に $\boldsymbol{\chi}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{0}$ あるいは $\boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{0}$ となる．

さて，正準変換 (5-202) が時間に依存しないので $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P}$ に対する Hamiltonian は

$$\tilde{H}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) = \tilde{H}(\boldsymbol{Q}',\boldsymbol{Q}^*,\boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}^*,t) = H(\boldsymbol{q}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}),\boldsymbol{p}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P}),t) \tag{5-207}$$

として与えられる．また，位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ の中だけで議論する限り拘束条件を考慮する必要がないため，この古典系は通常の方法で正準量子化され，時間発展 Green 関数は式 (2-19), (2-20) の経路積分表示によって

$$G(\boldsymbol{Q}_F^*,t_F;\boldsymbol{Q}_I^*,t_I) \equiv \langle \boldsymbol{Q}_F^*,t_F|\boldsymbol{Q}_I^*,t_I\rangle = \lim_{R\to\infty} S_R \tag{5-208}$$

と書ける．ただし

$$\begin{aligned}S_R &\equiv \int\left\{\prod_{r=0}^{R-1}\frac{d\boldsymbol{Q}_r^* d\boldsymbol{P}_r^*}{(2\pi)^{N-N_c}}\right\}\exp\left(i\sum_{r=0}^{R-1}\varepsilon_r\tilde{L}_r^*\right)\delta(\boldsymbol{Q}_0^*-\boldsymbol{Q}_I^*)\\ \tilde{L}_r^* &\equiv \boldsymbol{P}_r^*\cdot(\boldsymbol{Q}_{r+1}^*-\boldsymbol{Q}_r^*)/\varepsilon_r - \tilde{H}(\boldsymbol{0},\overline{\boldsymbol{Q}}_r^*,\boldsymbol{0},\boldsymbol{P}_r^*,t_r),\\ \overline{\boldsymbol{Q}}_r^* &\equiv (\boldsymbol{Q}_{r+1}^*+\boldsymbol{Q}_r^*)/2\end{aligned} \tag{5-209}$$

である．ところが

$$\begin{aligned}\tilde{L}_r &\equiv \boldsymbol{P}_r'\cdot(\boldsymbol{Q}_{r+1}'-\boldsymbol{Q}_r')/\varepsilon_r + \boldsymbol{P}_r^*\cdot(\boldsymbol{Q}_{r+1}^*-\boldsymbol{Q}_r^*)/\varepsilon_r\\ &\qquad -\tilde{H}(\overline{\boldsymbol{Q}}_r',\overline{\boldsymbol{Q}}_r^*,\boldsymbol{P}_r',\boldsymbol{P}_r^*,t_r)\\ &= \boldsymbol{P}_r\cdot(\boldsymbol{Q}_{r+1}-\boldsymbol{Q}_r)/\varepsilon_r - \tilde{H}(\overline{\boldsymbol{Q}}_r,\boldsymbol{P}_r,t_r)\end{aligned} \tag{5-210}$$

に対して

$$\delta(\boldsymbol{Q}_{r+1}')\delta(\boldsymbol{Q}_r')\delta(\boldsymbol{P}_r')\exp(i\varepsilon_r\tilde{L}_r^*) = \delta(\boldsymbol{Q}_{r+1}')\delta(\boldsymbol{Q}_r')\delta(\boldsymbol{P}_r')\exp(i\varepsilon_r\tilde{L}_r) \tag{5-211}$$

が成立するから，S_R は

$$S_R = \int \left\{ \prod_{r=0}^{R-1} d\boldsymbol{Q}'_r d\boldsymbol{P}'_r \delta(\boldsymbol{Q}'_r)\delta(\boldsymbol{P}'_r) \right\} S_R$$

$$= \int \left\{ \prod_{r=0}^{R-1} \frac{d\boldsymbol{Q}_r d\boldsymbol{P}_r}{(2\pi)^N} (2\pi)^{N_c} \delta(\boldsymbol{Q}'_r)\delta(\boldsymbol{P}'_r) \right\} \exp\left(i \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \tilde{L}_r \right) \delta(\boldsymbol{Q}^*_0 - \boldsymbol{Q}^*_I) \tag{5-212}$$

と表現できる．ここで，時刻 t_r における積分変数を $\boldsymbol{Q}_r$，$\boldsymbol{P}_r$ から $\boldsymbol{q}_r$，$\boldsymbol{p}_r$ に変数変換することを考えよう．まず，$\boldsymbol{Q}_r$，$\boldsymbol{P}_r$ と $\boldsymbol{q}_r$，$\boldsymbol{p}_r$ は正準変換 (5-202) で結ばれており，位相空間の体積要素や作用積分は正準変換の不変量だから

$$d\boldsymbol{Q}_r d\boldsymbol{P}_r = d\boldsymbol{q}_r d\boldsymbol{p}_r \tag{5-213}$$

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \tilde{L}_r = \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{ \boldsymbol{P}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}} - \tilde{H}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P},t) \right\}$$

$$= \int_{t_I}^{t_F} dt \left\{ \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \right\} \tag{5-214}$$

が成立する．また，式 (5-206) からは

$$\{\boldsymbol{R}'_r, \boldsymbol{R}'^t_r\}_P \underset{\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}}{\approx} T\{\boldsymbol{\chi}_r, \boldsymbol{\chi}^t_r\}_P T^t \tag{5-215}$$

$$\delta(\boldsymbol{R}'_r) = \delta(\boldsymbol{Q}'_r)\delta(\boldsymbol{P}'_r) = |\det(T)|^{-1}\delta(\boldsymbol{\chi}_r) \tag{5-216}$$

が導かれる (章末の演習問題3参照)．ただし，$\boldsymbol{Q}'_r$ や $\boldsymbol{P}'_r$ などと同様に時刻 t_r に関連した量であることを明示するため $\boldsymbol{R}'_r$，$\boldsymbol{\chi}_r$ と記し，これら $2N_c$ 次元ベクトルの第 m，第 n 要素間の Poisson 括弧 $\{R'_{r,m}, R'_{r,n}\}_P$，$\{\chi_{r,m}, \chi_{r,n}\}_P$ を mn 要素とする $2N_c$ 次の行列を $\{\boldsymbol{R}'_r, \boldsymbol{R}'^t_r\}_P$，$\{\boldsymbol{\chi}_r, \boldsymbol{\chi}'_r\}_P$ で表している．ところが $\boldsymbol{R}'_r$ は N_c 対の正準変数 $\boldsymbol{Q}'_r$，$\boldsymbol{P}'_r$ を並べて作ったベクトルだから，$\{\boldsymbol{R}'_r, \boldsymbol{R}'^t_r\}_P$ は式 (5-137) によって次数 $2N_c$ の基本シンプレクティック行列 J_{2N_c} に一致する．従って

$$1 = \det(J_{2N_c}) = \det(\{\boldsymbol{R}'_r, \boldsymbol{R}'^t_r\}_P) \underset{\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}}{\approx} \det(T\{\boldsymbol{\chi}_r, \boldsymbol{\chi}^t_r\}_P T^t)$$

$$= \det(T)^2 \det(\{\boldsymbol{\chi}_r, \boldsymbol{\chi}^t_r\}_P)$$

であり，式 (5-216) に代入すれば

$$\delta(\boldsymbol{Q}'_r)\delta(\boldsymbol{P}'_r) = |\det(\{\boldsymbol{\chi}_r, \boldsymbol{\chi}^t_r\}_P)|^{1/2}\delta(\boldsymbol{\chi}_r) \tag{5-217}$$

を得る[1]. 式(5−213), 式(5−217)を式(5−212)に代入し, その結果を式(5−208)に代入した上で式(5−214)を利用すれば, 式(2−21)の記法を用いて

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{Q}_F^*, t_F; \boldsymbol{Q}_I^*, t_I)\\
&= \lim_{R\to\infty} \int \left\{ \prod_{r=0}^{R-1} \frac{d\boldsymbol{q}_r \boldsymbol{p}_r}{(2\pi)^N} (2\pi)^{N_c} |\det(\{\chi_r, \chi_r^t\}_P)|^{1/2} \delta(\chi_r) \right\}\\
&\qquad \times \exp\left(i \sum_{r=0}^{R-1} \varepsilon_r \tilde{L}_r \right) \delta(\boldsymbol{Q}_0^* - \boldsymbol{Q}_I^*)\\
&= \int_{\boldsymbol{Q}_I^*, t_I}^{\boldsymbol{Q}_F^*, t_F} \mathfrak{D}\boldsymbol{q}\mathfrak{D}\boldsymbol{p} \left\{ \prod_t (2\pi)^{N_c} |\det(\{\chi_r, \chi_r^t\}_P)|^{1/2} \delta(\chi) \right\}\\
&\qquad \times \exp\left(i \int_{t_I}^{t_F} dt \{ \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \} \right)
\end{aligned} \tag{5-218}$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} \prod_{r=0}^{R-1} (2\pi)^{N_c} |\det(\{\chi_r, \chi_r^t\}_P)|^{1/2} \delta(\chi_r)\\
&\qquad \to \prod_t (2\pi)^{N_c} |\det(\{\chi, \chi^t\}_P)|^{1/2} \delta(\chi)
\end{aligned} \tag{5-219}$$

という略記法を導入している. また, 定数 $(2\pi)^{N_c}$ を積分測度 $\mathfrak{D}\boldsymbol{q}\mathfrak{D}\boldsymbol{p}$ に吸収して

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{Q}_F^*, t_F; \boldsymbol{Q}_I^*, t_I)\\
&\quad = \int_{\boldsymbol{Q}_I^*, t_I}^{\boldsymbol{Q}_f^*, t_F} \mathfrak{D}\boldsymbol{q}\mathfrak{D}\boldsymbol{p} \left\{ \prod_t |\det(\{\chi, \chi^t\}_P)|^{1/2} \delta(\chi) \right\}\\
&\qquad \times \exp\left(i \int_{t_I}^{t_F} dt \{ \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) \} \right)
\end{aligned} \tag{5-220}$$

と表現する場合もある. 何れにせよ, 拘束条件によって制限された位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ における経路積分を元々の正準変数 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ を用いて書き表すことが可能となる. Faddeev によって最初に導出されたことから式(5−218)や式(5−220)を Faddeev の経路積分と呼び, $\det(\{\chi_r, \chi_r^t\}_P)$ を Faddeev 行列式と称する.

1) 式(5−215)は弱等式だが, 式(5−217)は通常の等号である点に注意. 式(5−216)の両辺は $\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ 以外では零となるデルタ関数を含むからである.

演習問題

1. 式(5 − 134)を導出せよ．
2. 式(5 − 182)を導出せよ．ただし δv_i，δv_j は定数とし，拘束条件量 ψ_i，ψ_j が時間を陽に含まないことを仮定せよ．
3. 正準変数 $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{p}$ の関数を要素とする $2N_c$ 次元のベクトル $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{\chi}$ が可逆な線形変換 $\boldsymbol{R}' = T\boldsymbol{\chi}$ によって結ばれるとき，

$$\text{(a)}\quad \{\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}'^t\}_P \underset{\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}}{\approx} T\{\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\chi}^t\}_P T^t \qquad \text{(b)}\quad \delta(\boldsymbol{R}') = |\det(T)|^{-1}\delta(\boldsymbol{\chi})$$

が成立することを示せ．ただし $\boldsymbol{R}'$ を構成する $2N_c$ 個の関数 $\{R'_n\}_{n=1\sim 2N_c}$ は互いに独立であり，従って $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{0}$ が満足される部分位相空間 $\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ の次元は $2(N-N_c)$ であるとする．また，変換行列 T は $\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}$ に依存しても良い．

第6章
古典場の理論

本章では，場の理論における経路積分の準備として，古典場の理論の復習を行なう．
実スカラー場 ϕ とその微分からなる簡単な Lagrangian 密度から，Hamilton の原理を用いて Euler-Lagrange 方程式を導き，更に正準形式の議論において正準方程式を導く．次いで，無限小正準変換と Poisson 括弧の関係を論じる．
ここでは，通常の解析力学と古典場の理論との類似性及び違いを明確に認識して頂きたい．その中で，具体的な変分計算（汎関数微分）の方法を身につけて欲しい．

6－1　Hamilton の原理

ある実スカラー場 $\phi(x)$ を考える．ここで x は4次元次空の座標であり，その成分表示は

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \boldsymbol{x}), \quad \mu = 0,1,2,3 \tag{6-1}$$

である．明らかなように，$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ が3次元空間の座標となっている．以後，簡単のために $c = \hbar = 1$ とした自然単位系を用いることにする．更に，4次元時空 (Minkowski 空間) の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{6-2}$$

と定義する．これにより例えば，

$$x^2 \equiv g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu} = (x^0)^2 - \boldsymbol{x}^2 = t^2 - \boldsymbol{x}^2 \tag{6-3}$$

などとなる．同じ添字が上下に現われたら，その添字について和をとるものとする．
さて，$\phi(x)$ 及びその微分からなる Lagrangian 密度を $\mathcal{L}[x] \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x))$ とし，これの全時空にわたる積分として作用積分

$$A[\phi] \equiv \int d^4x \mathcal{L}\left(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)\right), \quad d^4x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{6-4}$$

を定義する．この作用積分が停留値をとるときに満たさねばならない方程式（これをEuler-Lagrange 方程式という）が，実際に実現される場の方程式になっているのである．これを場の理論における Hamilton の原理という．$\phi(x)$ の変分を

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{6-5}$$

とする．但し，境界上（実際には無限遠点）では $\delta\phi = 0$ とする．この $\phi'(x)$ からなる $A[\phi']$ と $A[\phi]$ の差 δA を計算すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\delta A \equiv A[\phi'] - A[\phi] &= \int d^4x \left\{\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right\} \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right\} \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right\} \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right\} \\
&= \int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_\mu\phi}\right\}\delta\phi
\end{aligned} \tag{6-6}$$

ここで，式 (6−5) の変分は同一座標点で定義されているので，$\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$ とできること，及び境界上では $\delta\phi = 0$ となることを用いた．停留値をとるということは，$\delta A = 0$ とすることなので，式 (6−6) より，

$$\int d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_\mu\phi}\right\}\delta\phi = 0 \tag{6-7}$$

となる．$\delta\phi$ は境界上で 0 となること以外は全く任意なので，結局

$$\frac{\delta A}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_\mu\phi} = 0 \tag{6-8}$$

が得られる．これが場の理論における Euler-Lagrange 方程式である．場 ϕ による作用積分 $A[\phi]$ の汎関数微分であることを明記した．

6−2 正準形式

場 $\phi[x]$ に正準共役な運動量 $\pi(x)$ を

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\dot{\phi}(x)} \tag{6-9}$$

で定義する．但し，$\dot{\phi}(x) \equiv \partial_0\phi(x)$ である．これを用いて，Hamiltonian密度 $\mathcal{H}[x]$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}[x] &\equiv \mathcal{H}\left(\phi(x), \partial_k\phi(x), \pi(x), \partial_k\pi(x)\right) \\
&= \dot{\phi}(x)\pi(x) - \mathcal{L}[x]
\end{aligned}
\tag{6-10}
$$

となる．ここで，$k = 1, 2, 3$ である．$\mathcal{H}[x]$ は式(6−9)を解いて，$\phi(x)$, $\pi(x)$, $\partial_k\phi(x)$, $\partial_k\pi(x)$ で表わされているとする．これから，Hamiltonian H は

$$
H[\phi, \pi] = \int d^3x \mathcal{H}\left(\phi(x), \partial_k\phi(x), \pi(x), \partial_k\pi(x)\right) \tag{6-11}
$$

で与えられる．$\int d^3x$ は3次元空間での積分である．

以上の準備のもとに，場の理論における正準方程式を導出する．まず，$\phi(x)$ と $\pi(x)$ の変分を

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \\
\pi(x) &\longrightarrow \pi'(x) = \pi(x) + \delta\pi(x)
\end{aligned}
\tag{6-12}
$$

としたときの H の変分 δH を計算する．式(6−6)の下で指摘したことに注意して，

$$
\begin{aligned}
\delta H &= H[\phi', \pi'] - H[\phi, \pi] \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\partial_k\phi}\delta(\partial_k\phi) \right\} \\
&\qquad + \int d^3x \left\{ \frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\pi}\delta\pi + \frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\partial_k\pi}\delta(\partial_k\pi) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\phi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\partial_k\phi} \right\}\delta\phi + \int d^3x \left\{ \frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\pi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{H}[x]}{\partial\partial_k\pi} \right\}\delta\pi
\end{aligned}
\tag{6-13}
$$

が得られる．

一方，式(6−10)の最右辺から δH を計算してみると，

$$
\begin{aligned}
\delta H &= \delta\int d^3x \left\{ \dot{\phi}(x)\pi(x) - \mathcal{L}\left(\phi(x), \dot{\phi}(x), \partial_k\phi(x)\right) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ \delta\dot{\phi}\cdot\pi + \dot{\phi}\delta\pi - \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi}\delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_k\phi}\delta(\partial_k\phi) - \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right\}
\end{aligned}
$$

である．ここで，被積分関数の最後の項に式(6−9)を代入すると，

$$
\delta H = \int d^3x \left\{ \delta\dot{\phi}\cdot\pi + \dot{\phi}\delta\pi - \left(\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\phi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_k\phi} \right)\delta\phi - \pi\delta\dot{\phi} \right\}
$$

$$= \int d^3x \left\{ - \left(\frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \phi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \partial_k \phi} \right) \delta\phi + \dot{\phi}\delta\pi \right\} \tag{6-14}$$

となる．式(6-13)と式(6-14)とを比較し，$\delta\phi$ と $\delta\pi$ は独立でかつ境界上以外では全く任意であることを用いると，結局

$$\frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \phi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \partial_k \phi} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \phi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \partial_k \phi} \right) \tag{6-15}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \pi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \partial_k \pi} \tag{6-16}$$

が得られる．

次に，式(6-15)にEuler-Lagrange方程式から得られる

$$\frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \phi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \partial_k \phi} = \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\pi}$$

を代入すると，

$$\dot{\pi} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \phi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \partial_k \phi} \right) \tag{6-17}$$

となる．この式(6-17)及び式(6-16)が場の理論における正準方程式である．

今後のために，定義

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \phi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \partial_k \phi}, \quad \frac{\delta H}{\delta \pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \pi} - \partial_k \frac{\partial \mathcal{H}[x]}{\partial \partial_k \pi} \tag{6-18}$$

を用いて，正準方程式を書き換えておく．汎関数微分は H ではなく，それを時間で積分したもので定義されるが，簡単のために式(6-18)の記法を用いることにする．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\phi} = \dfrac{\delta H}{\delta \pi} & \quad (6-16)' \\[2ex] \dot{\pi} = -\dfrac{\delta H}{\delta \phi} & \quad (6-17)' \end{array} \right.$$

6-3 無限小正準変換

前節で導いた正準方程式を不変に保つ変換（これを正準変換という），特に無限小変換を考察し，その生成子（母関数）と場の量の変換の関係式を導出する．これは系の対称性と保存量を結びつける重要な関係式である．

まず，時空座標の無限小変換

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

を考える．これによって場の量 $\phi(x)$ 及びその正準共役な運動量 $\pi(x)$ も次のように

変換するとする．

$$\begin{aligned}\phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)\\ \pi(x) &\longrightarrow \pi'(x') = \pi(x) + \delta\pi(x)\end{aligned} \tag{6-19}$$

ここで，無限小変換の生成子と密接な関係にある Lie 微分 δ_L を定義する．これは

$$\delta_L\phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x)$$

というもので，同じ座標値の点において定義される．δ_L と δ との関係は次のとおりである．

$$\begin{aligned}\delta_L\phi(x) &\equiv \phi'(x) - \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) - \phi'(x') + \phi'(x)\\ &\cong \phi'(x') - \phi(x) - (\phi(x') - \phi(x))\\ &= \delta\phi(x) - \partial_\mu\phi(x)\cdot\delta x^\mu\end{aligned} \tag{6-20}$$

さて，このような無限小変換の生成子を求めるために，しばらく場の量の正準変換を考察する．一般に，正準変数 $\phi(x)$, $\pi(x)$ が変換によって $\Phi(x)$, $\Pi(x)$ になったと仮定し，変換の前後で同形の正準方程式が得られるとき，その変換を正準変換という．つまり，新しい正準変数で表わされた Hamiltonian K を用いて

$$\begin{cases}\dot{\phi} = \dfrac{\delta H}{\delta\pi}\\[2ex] \dot{\pi} = -\dfrac{\delta H}{\delta\phi}\end{cases} \quad \underset{\text{正準変換}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases}\dot{\Phi} = \dfrac{\delta K}{\delta\Pi}\\[2ex] \dot{\Pi} = -\dfrac{\delta K}{\delta\Phi}\end{cases} \tag{6-21}$$

となっているのである．新しい変数が式 (6-21) を満たすためには，$L \equiv \int d^3x\mathcal{L}[x]$ として

$$\begin{aligned}L &= \int d^3x\dot{\phi}(x)\pi(x) - H[\phi,\pi]\\ &= \int d^3x\dot{\Phi}(x)\Pi(x) - K[\Phi,\Pi] + \frac{dW}{dt}\end{aligned} \tag{6-22}$$

が成立しなければならない[1)]．正準方程式の導出を辿ってみると，まず，作用積分 $A = \int dtL$ の停留条件から Euler-Lagrange 方程式を得，それを用いて式 (6-16),(6-17) を得た．ところが A の定義から明らかなように，式 (6-22) の最右辺第3項は，$\int dt$ を行なうことにより時間的境界の値（一定）となってしまい，停留条件には全く寄与しなくなる．このことから式 (6-22) が式 (6-21) を導くことは明らかである．ここで W は正準変数の任意の関数であるが，後々の無限小変換を念頭に置いて，更に

1) 実は更に $\int d^3x\partial_k N^k$ という量が入っていてもいいが，これは空間的境界の表面積分となってしまい，境界条件で定まった値（一定）になるので無視した．

$$W[\phi, \Phi] = -\int d^3x\Phi(x)\Pi(x) + W'[\phi, \Pi] \tag{6-23}$$

としてみる．そうすると，定義

$$W'[\phi, \Pi] \equiv \int d^3x\mathcal{W}'\left(\phi(x), \partial_k\phi(x), \Pi(x), \partial_k\Pi(x)\right) \tag{6-24}$$

に注意して，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W[\phi, \Phi] &= -\int d^3x(\dot{\Phi}\Pi + \Phi\dot{\Pi}) + \frac{d}{dt}W'[\phi, \Pi] \\
&= -\int d^3x(\dot{\Phi}\Pi + \Phi\dot{\Pi}) + \int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\phi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\phi}\right\}\dot{\phi} \\
&\quad + \int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\Pi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\Pi}\right\}\dot{\Pi}
\end{aligned}$$

となるから，これを式 (6-22) に代入すると，

$$\begin{aligned}
\int d^3x\dot{\phi}\pi - H[\phi, \pi] &= \int d^3x\dot{\Phi}\Pi - K[\Phi, \Pi] - \int d^3x(\dot{\Phi}\Pi + \Phi\dot{\Pi}) \\
&\quad + \int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\phi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\phi}\right\}\dot{\phi} \\
&\quad + \int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\Pi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\Pi}\right\}\dot{\Pi} \\
&= -\int d^3x\Phi\dot{\Pi} + \int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\Pi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\Pi}\right\}\dot{\Pi} \\
&\quad + \int d^3x\left\{\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\phi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\phi}\right\}\dot{\phi} - K[\Phi, \Pi]
\end{aligned} \tag{6-25}$$

が得られる．この両辺を $\phi(x)$, $\Pi(x)$ の関数として比較すると，

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\Pi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\Pi} \equiv \frac{\delta W'}{\delta\Pi} \\
\pi &= \frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\phi} - \partial_k\frac{\partial\mathcal{W}'}{\partial\partial_k\phi} \equiv \frac{\delta W'}{\delta\phi} \\
H[\phi, \pi] &= K[\Phi, \Pi]
\end{aligned} \tag{6-26}$$

が得られる．このような W' や W を正準変換の生成子という．

次に恒等変換

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \phi(x) \\
\Pi(x) &= \pi(x)
\end{aligned} \tag{6-27}$$

を考える．このとき，W' は

$$W' = \int d^3x \Pi(x)\phi(x) \tag{6-28}$$

となっている．それは

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\delta W'}{\delta \Pi} = \frac{\partial \mathcal{W}'}{\partial \Pi} = \phi \\ \pi &= \frac{\delta W'}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{W}'}{\partial \phi} = \Pi\end{aligned} \tag{6-29}$$

から明らかである．つまり，恒等変換の生成子は式(6−28)で与えられるのである．

以上をもって無限小変換に入る準備が出来た．式(6−28)が恒等変換の生成子であることから，無限小変換の生成子は次式で与えられる．

$$W' = \int d^3x \Pi(x)\phi(x) + \varepsilon G[\phi, \pi] \tag{6-30}$$

但し，ε は無限小パラメータである．この式を式(6−26)に代入すると，

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{\delta W'}{\delta \Pi(x)} = \phi(x) + \varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \Pi(x)} \cong \phi(x) + \varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)} \\ \pi(x) &= \frac{\delta W'}{\delta \phi(x)} = \Pi(x) + \varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)}\end{aligned} \tag{6-31}$$

が得られる．ここで，ε が無限小であるということから，$\Phi(x), \Pi(x)$ は同じ座標値の点における $\phi(x), \pi(x)$ の無限小変換後の場の量，つまり $\phi'(x), \pi'(x)$ に相当していることがわかる．従って，式(6−31)は

$$\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)}$$

$$\pi(x) = \pi'(x) + \varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)}$$

すなわち，

$$\begin{aligned}\delta_L \phi(x) &= \varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \pi(x)} \\ \delta_L \pi(x) &= -\varepsilon \frac{\delta G[\phi, \pi]}{\delta \phi(x)}\end{aligned} \tag{6-32}$$

となる．この $G[\phi, \pi]$ も無限小変換の生成子という．これまでの導出過程から明らかなように，式(6−32)の左辺は δ ではなく Lie 微分 δ_L となっている点が重要である．

6−4　Poisson 括弧

ここでは Poisson 括弧を導入し，それを用いて無限小変換を表わす．Poisson 括弧

$\{.,.\}_P$ を交換子 $i^{-1}[.,.]$ で置き換えれば量子論に移行することができる．これが正準量子化の方法である．

まず，$\phi(x)$ と $\pi(x)$ の一般的な関数

$$F[\phi,\pi] \equiv \int d^3x f[x] \equiv \int d^3x f\left(\phi(x), \partial_k\phi(x), \pi(x), \partial_k\pi(x)\right) \qquad (6-33)$$

を考える．$\phi(x)$ と $\pi(x)$ を無限小だけ正準変換 (δ_L) したときの関数 F の変化 $\delta_L F$ を計算する．これまでに度々行なっている手法を用いると

$$\delta_L F = \int d^3x \left\{\frac{\partial f}{\partial\phi} - \partial_k \frac{\partial f}{\partial\partial_k\phi}\right\}\delta_L\phi + \int d^3x \left\{\frac{\partial f}{\partial\pi} - \partial_k \frac{\partial f}{\partial\partial_k\pi}\right\}\delta_L\pi$$

$$= \int d^3x \left\{\frac{\delta F}{\delta\phi}\delta_L\phi + \frac{\delta F}{\delta\pi}\delta_L\pi\right\}$$

となる．これに式 (6-32) を代入すると，

$$\delta_L F = \int d^3x \left\{\frac{\delta F}{\delta\phi}\varepsilon\frac{\delta G}{\delta\pi} - \frac{\delta F}{\delta\pi}\varepsilon\frac{\delta G}{\delta\phi}\right\}$$

$$= \varepsilon \int d^3x \left\{\frac{\delta F[\phi,\pi]}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G[\phi,\pi]}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta F[\phi,\pi]}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G[\phi,\pi]}{\delta\phi(x)}\right\} \qquad (6-34)$$

が得られる．ここで，場の理論における Poisson 括弧を

$$\{F[\phi,\pi], G[\phi,\pi]\}_P \equiv \int d^3x \left\{\frac{\delta F[\phi,\pi]}{\delta\phi(x)}\frac{\delta G[\phi,\pi]}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta F[\phi,\pi]}{\delta\pi(x)}\frac{\delta G[\phi,\pi]}{\delta\phi(x)}\right\} \qquad (6-35)$$

と定義する．これを用いると $\delta_L F$ は，無限小変換の生成子 G により

$$\delta_L F = \varepsilon\{F, G\}_P \qquad (6-36)$$

となる．

一例として，

$$F[\phi,\pi] = \int d^3y\, \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(y) = \phi(x), \quad \text{但し,} \quad y^0 = x^0 \qquad (6-37)$$

とおけば式 (6-36) は

$$\delta_L\phi = \varepsilon\{\phi, G\}_P \qquad (6-38)$$

となる．ここで，右辺の Poisson 括弧の変分計算を実行するときは，式 (6-37) に注意して計算する必要がある．例えば，

$$\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(y)} = \frac{\partial}{\partial\phi(y)}\left(\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\phi(y)\right) = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \qquad (6-39)$$

などとなる．また，

$$F[\phi,\pi]=\int d^3y\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\pi(y)=\pi(x),\quad \text{但し，}\quad y^0=x^0 \tag{6-40}$$

とおけば，

$$\delta_L\pi=\varepsilon\{\pi,G\}_P \tag{6-41}$$

が得られる．

次に，具体的な無限小変換として，時間軸方向の並進

$$\begin{aligned} x^0 &\longrightarrow x'^0=x^0-\varepsilon \\ x^k &\longrightarrow x'^k=x^k \end{aligned} \tag{6-42}$$

を考えてみる．このような変換をしても各時空点（各座標点ではない）における場の値は変化しないから，例えば

$$\phi'(x')=\phi(x),\quad \text{すなわち}\quad \delta\phi=0$$

である．これを式 (6-20) に代入すると，

$$\delta_L\phi=-\partial_\mu\phi(x)\cdot\delta x^\mu=\varepsilon\partial_0\phi\equiv\varepsilon\dot{\phi} \tag{6-43}$$

が得られる．同様にして，

$$\delta_L\pi=\varepsilon\dot{\pi} \tag{6-44}$$

となる．これらを式 (6-32) に代入してみると，

$$\begin{aligned} \dot{\phi}&=\frac{\delta G}{\delta\pi} \\ \dot{\pi}&=-\frac{\delta G}{\delta\phi} \end{aligned} \tag{6-45}$$

が得られる．この式と正準方程式 (6-16)′, (6-17)′ を比較してみると，直ちに

$$G=H$$

となっていることがわかる．以上のことから結局，式 (6-38) と式 (6-41) は次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} \dot{\phi}&=\{\phi,H\}_P \\ \dot{\pi}&=\{\pi,H\}_P \end{aligned} \tag{6-46}$$

こうして，場の時間並進の生成子は Hamiltonian H になっていることがわかった．

演習問題

1. Lagrangian 密度 $\mathcal{L}[x]$ が

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x)\partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

のとき，$\mathcal{H}[x]$ は $\phi(x)$, $\nabla\phi(x)$, $\pi(x)$ の関数となることを示せ．

2. Poisson 括弧の定義に従って，以下の式を導け．

$$\{\phi(x), \pi(y)\}_P = \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

$$\{\phi(x), \phi(y)\}_P = \{\pi(x), \pi(y)\}_P = 0$$

但し，$x^0 = y^0$ とする．

第7章 場の理論における経路積分

本章では，n 自由度の経路積分を連続無限自由度にまで拡張し，場の理論における経路積分の説明を行なう．ボソン場の経路積分から始めて，十分理解を深めたところでフェルミオン場の説明に入る．特に，K 点 Green 関数を主役に据えて説明される摂動論は，後で量子電磁力学 (QED) のところでも重要となるので，ここでしっかりと理解しておく必要がある．

7-1 無限自由度の演算子

2 章では n 自由度の演算子 $\widehat{p}_i(t), \widehat{q}_i(t)$ $(i=1,\cdots,n)$ を用いて経路積分を説明してきた．ここではこの演算子を無限自由度にまで拡張する．それには添字 i を連続無限のパラメータ $\boldsymbol{x}$ に置き換えればよい．すなわち，$\widehat{q}_i(t) \to \widehat{q}_{\boldsymbol{x}}(t)$ である．$\boldsymbol{x}$ は 3 次元空間の位置を表わす連続パラメータであるので，

$$\widehat{q}_{\boldsymbol{x}}(t) \equiv \widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\sqrt{\Delta^3 x}, \quad 但し, \quad \Delta^3 x \equiv \Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3 \tag{7-1}$$

と定義し[1]，$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)$ を無限個の座標変数演算子と解釈する．そうすると，これは前章で考えた古典場に対応する量子力学系の演算子を表わしているとも言える．もちろん，対応している古典場の満たす方程式が同じであるとしての話であるが．

以上のように解釈することにより，多自由度の量子力学を直ちに無限自由度の量子力学（これを場の量子論という）に拡張することができる．従って，経路積分表式も多自由度から無限自由度に書き換えることが可能となる．

まず，$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)$ に正準共役な運動量演算子を $\widehat{\pi}(\boldsymbol{x},t)$ とする．これら Heisenberg 表示の演算子は，Schrödinger 表示の演算子 $\widehat{\phi}(\boldsymbol{x}), \widehat{\pi}(\boldsymbol{x})$ と次の関係で結びつけられている．

---

1) こうしておくと，例えば

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(t)\dot{q}^i(t) \to \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{x}} \dot{q}_{\boldsymbol{x}}(t)\dot{q}^{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{x}} \dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)\Delta^3 x = \frac{1}{2}\int d^3x\{\dot{\phi}(x)\}^2$$

などとなる．

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t) = e^{i\widehat{H}t}\widehat{\phi}(\boldsymbol{x})e^{-i\widehat{H}t}$$
$$\widehat{\pi}(\boldsymbol{x},t) = e^{i\widehat{H}t}\widehat{\pi}(\boldsymbol{x})e^{-i\widehat{H}t} \tag{7-2}$$

ここで，自然単位系を用いているので，$\hbar = 1$ としていることに注意．次に，ここでも動く基底 $|\,\phi,t\rangle$ を考える．まず，$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x})$ の固有ベクトルからなる正規直交基底を $\{|\,\phi\rangle\}$ とする．すなわち

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x})\,|\,\phi\rangle = \phi(\boldsymbol{x})\,|\,\phi\rangle, \quad \phi(\boldsymbol{x}):\text{固有値} \tag{7-3}$$

である．左辺の左から $e^{i\widehat{H}t}$ を作用させると，式 (7-2) を用いて，

$$e^{i\widehat{H}t}\widehat{\phi}(\boldsymbol{x})\,|\,\phi\rangle = e^{i\widehat{H}t}\widehat{\phi}(\boldsymbol{x})e^{-i\widehat{H}t}e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle$$
$$= \widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle$$

となり，一方右辺は

$$e^{i\widehat{H}t}\phi(\boldsymbol{x})\,|\,\phi\rangle = \phi(\boldsymbol{x})e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle$$

となる．従って，

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\left(e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle\right) = \phi(\boldsymbol{x})\left(e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle\right) \tag{7-4}$$

が得られる．すなわち，$e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle$ は固有値 $\phi(\boldsymbol{x})$ に属する $\widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)$ の固有ベクトルであることが示せた．そこで，

$$|\,\phi,t\rangle \equiv e^{i\widehat{H}t}\,|\,\phi\rangle$$

と定義する．これより，式 (7-4) は

$$\widehat{\phi}(\boldsymbol{x},t)\,|\,\phi,t\rangle = \phi(\boldsymbol{x})\,|\,\phi,t\rangle \tag{7-4$'$}$$

となる．

7-2 ボソン場の経路積分

スピンが整数の粒子は，Bose-Einstein 統計に従うことからボソン (Boson) と呼ばれている．その代表的なものは Klein-Gordon 場の粒子であり，それはスピン 0 のボソンである．Lagrangian 密度の形で記すと，

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2(x)\right) \tag{7-5}$$

である．実際，Euler-Lagrange 方程式 (6 章式 (6-8)) を適用すると，Klein-Gordon

方程式

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0, \quad \text{但し,} \quad \Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu \tag{7-6}$$

が得られる．場を量子化して得られた粒子がボソンのとき，その場をボソン場という．

また，後の章で主役を演じることになる電磁場 $A_\mu(x)$ は，スピンが1のボソン場である．電磁場を記述する Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}[x] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) \tag{7-7}$$

$$\text{但し,} \quad F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$$

と表わされる．Euler-Lagrange 方程式を適用してみると,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{7-8}$$

が得られる．これと $F_{\mu\nu}(x)$ の定義式から Maxwell の四つの方程式が再現される．

ここでは，このようなボソン場の経路積分表式を求める．簡単のために Klein-Gordon 場を例にとる．まず，与えられた Lagrangian 密度から，演算子で記述された Hamiltonian $\widehat{H} \equiv H[\widehat{\phi}, \widehat{\pi}]$ が得られたとして，それを用いて時間発展 Green 関数の基本式を求める．

$$\begin{aligned}
G[\phi_F, \phi_I; t_F - t_I] &= \langle \phi_F, t_F \mid \phi_I, t_I \rangle = \langle \phi_F \mid e^{-i\widehat{H}(t_F - t_I)} \mid \phi_I \rangle \\
&= \langle \phi_F \mid e^{-i\widehat{H}(t_F - t)} \cdot e^{-i\widehat{H}(t - t_I)} \mid \phi_I \rangle \\
&= \int \prod_{\boldsymbol{x}} d\phi(\boldsymbol{x}, t) \langle \phi_F \mid e^{-i\widehat{H}(t_F - t)} \mid \phi \rangle \langle \phi \mid e^{-i\widehat{H}(t - t_I)} \mid \phi_I \rangle \\
&= \int \prod_{\boldsymbol{x}} d\phi(\boldsymbol{x}, t) G[\phi_F, \phi; t_F - t] G[\phi, \phi_I; t - t_I]
\end{aligned} \tag{7-9}$$

これが，2章で位相空間における経路積分を導出するための出発点となった式である．ここで，場の演算子 $\widehat{\phi}(\boldsymbol{x})$ の固有ベクトル $|\phi\rangle$ の完全系

$$\int \prod_{\boldsymbol{x}} d\phi(\boldsymbol{x}, t) \mid \phi \rangle \langle \phi \mid = \widehat{I} \tag{7-10}$$

を用いた．本来，$|\phi\rangle$ 中の ϕ には無限自由度を意味する添字 $\boldsymbol{x}$ が付与されていなければならないが，誤解はないと思われるので省略した．

後は，時間間隔 $t_F - t_I$ を N 等分し，式 (7-9) を繰り返し適用すればよい．その結果,

$$G[\phi_F, \phi_I; t_F - t_I] = G[\phi_N, \phi_0; N\varepsilon]$$

$$= \int \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{\boldsymbol{x}} d\phi_n G[\phi_{n+1}, \phi_n; \varepsilon] \delta(\phi_0 - \phi_I) \qquad (7\text{-}11)$$

が得られる．但し，

$$\varepsilon \equiv (t_F - t_I)/N, \quad t_n = t_I + n\varepsilon$$

$$\phi_F \equiv \phi_N$$

とし，更に略記

$$\phi_n \equiv \phi(\boldsymbol{x}, t_n)$$

を用いた．次に $G[\phi_{n+1}, \phi_n; \varepsilon]$ を計算するのであるが，これも2章と同様にして，

$$G[\phi_{n+1}, \phi_n; \varepsilon] \cong \int \prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\pi_n}{2\pi} e^{i\varepsilon \widetilde{L}_n} \qquad (7\text{-}12)$$

となる．但し，

$$\widetilde{L}_n \equiv \int d^3x \left\{ \pi_n \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\varepsilon} - \mathcal{H}(\overline{\phi}_n, \partial_k \overline{\phi}_n, \pi_n, \partial_k \pi_n) \right\} \qquad (7\text{-}13)$$

である．この $\widetilde{L}_n$ は $N \to \infty$ $(\varepsilon \to 0)$ の極限において，

$$\widetilde{L}(t) \equiv \lim_{N\to\infty} \widetilde{L}_n$$

$$= \int d^3x \left\{ \pi(\boldsymbol{x}, t)\dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t) - \mathcal{H}(\phi(\boldsymbol{x}, t), \partial_k \phi(\boldsymbol{x}, t), \pi(\boldsymbol{x}, t), \partial_k \pi(\boldsymbol{x}, t)) \right\} \qquad (7\text{-}14)$$

に収束する．

最後に，式 (7-12) を式 (7-11) に代入し，$N \to \infty$ の極限をとるとボソン場の経路積分表式が得られる．

$$G[\phi_F, \phi_I; t_F - t_I] = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\phi_n d\pi_n}{2\pi} e^{i\varepsilon \widetilde{L}_n} \delta(\phi_0 - \phi_I)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} \prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\phi_n d\pi_n}{2\pi} \delta(\phi_0 - \phi_I)\, e^{i \sum_{m=0}^{N-1} \varepsilon \widetilde{L}_m}$$

$$= \int_{\phi(\boldsymbol{x}, t_I)}^{\phi(\boldsymbol{x}, t_F)} \mathfrak{D}\phi \mathfrak{D}\pi \exp i \int_{t_I}^{t_F} dt \int d^3x \left\{ \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}[x] \right\}$$

$$= \int_{\phi_I}^{\phi_F} \mathfrak{D}\phi \mathfrak{D}\pi \exp i\widetilde{A}[\phi, \pi] \qquad (7\text{-}15)$$

ここで，

$$\widetilde{A}[\phi,\pi] \equiv \int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}[x]\right\} \tag{7-16}$$

であるとし，また

$$\prod_{n=0}^{N-1}\prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\phi_n d\pi_n}{2\pi}\delta(\phi_0-\phi_I) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \prod_{t_I\leqq t\leqq t_F}\prod_{\boldsymbol{x}} \frac{d\phi(x)d\pi(x)}{2\pi}\delta(\phi_0-\phi_I)$$

を $\mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi$ と記した．これからも明らかなように，式(7-15)には時間軸方向の積分だけではなく3次元空間に渡る積分も含まれている．$t_I \to -\infty$, $t_F \to +\infty$ とすると，これは全時空に渡る積分となる．量子電磁力学の計算で用いられるのはこのような表式のものである．

量子力学では時間 t をパラメータとして扱い種々の計算を行なうが，場の量子論では4次元座標 $(t,\boldsymbol{x})$ がパラメータとなっているのである．

次に式(7-15)を $\pi(x)$ について積分する．一般に，実在する場の理論の Lagrangian は標準形であるので，2章で出てきた $\frac{1}{2i}\delta(0)\mathrm{Tr}\ln \mathrm{M}(\boldsymbol{q},t)$ のような項は存在しない．そこでここでは，最初からこのような項は考えないことにする．Lagrangian 密度として

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - U(\phi(x)) \tag{7-17}$$

を採用したとすると，Hamiltonian 密度 $\mathcal{H}[x]$ は次のようになる．

$$\mathcal{H}[x] = \dot{\phi}(x)\pi(x) - \mathcal{L}[x] = \frac{1}{2}\{\pi(x)\}^2 + V(\phi(x)) \tag{7-18}$$

但し，

$$V(\phi(x)) = -\frac{1}{2}\partial_k\phi(x)\partial^k\phi(x) + U(\phi(x)) \tag{7-19}$$

である．式(7-15)において，

$$\pi(x) \longrightarrow \pi'(x) = \pi(x) - \dot{\phi}(x) \tag{7-20}$$

という場の変数変換を行なうと，

$$\mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi = \mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi' \tag{7-21}$$

に注意して，

$$G[\phi_F,\phi_I;t_F-t_I] = \int_{\phi_I}^{\phi_F} \mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi \exp i\int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{\pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{H}[x]\right\}$$

$$= \int_{\phi_I}^{\phi_F} \mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi' \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{ (\pi' + \dot{\phi})\dot{\phi} - \frac{1}{2}(\pi' + \dot{\phi})^2 - V(\phi) \right\}$$

$$= \int_{\phi_I}^{\phi_F} \mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi' \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\pi')^2 + \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\partial_k\phi\partial^k\phi - U(\phi) \right\}$$

$$= \int_{\phi_I}^{\phi_F} \mathfrak{D}\phi\mathfrak{D}\pi' \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\pi')^2 \right\}$$

$$\times \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{ \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - U(\phi) \right\}$$

が得られる．ここで，4 次元関数空間上の行列式（汎関数行列式）Det $f(x,y)$ を導入する．これは，関数 $f(x,y)$ を無限次行列の第 x 行第 y 列成分と解釈し，その行列の determinant をとったものである．これを用いると，

$$\int \mathfrak{D}\pi' \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \left\{ -\frac{1}{2}(\pi'(x))^2 \right\}$$

$$= \int \mathfrak{D}\pi' \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int_{t_I}^{t_F} d^4x\, d^4y \pi'(x)\delta^4(x-y)\pi'(y) \right\}$$

$$= \mathrm{Det}^{-\frac{1}{2}} \delta^4(x,y) = 1 \qquad (7\text{-}22)$$

とできる．最後の等式は，無限次行列の (x,y) 成分が δ_{xy} であると解釈すればよい．式 (7-22) を上の式に代入し，式 (7-17) を使えば結局，

$$G[\phi_F, \phi_I; t_F - t_I] = \int_{\phi_I}^{\phi_F} \mathfrak{D}\phi \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x] \qquad (7\text{-}23)$$

となる．

一般化 Green 関数も 2 章と同様にして導出される．その前に初期状態，終状態が ϕ_I, ϕ_F ではなくて，もっと一般的な状態

$$\Psi_I[\phi_I] = \langle \phi_I, t_I \mid \Psi_I, t_I \rangle, \quad \Psi_F[\phi_F] = \langle \phi_F, t_F \mid \Psi_F, t_F \rangle \qquad (7\text{-}24)$$

で表わされる場合を考える．このとき，

$$G[\Psi_F, \Psi_I; t_F - t_I]$$

$$= \langle \Psi_F, t_F \mid \Psi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \prod_{y} d\phi(y, t_I) \prod_{z} d\phi(z, t_F) \langle \Psi_F, t_F \mid \phi_F, t_F \rangle \langle \phi_F, t_F \mid \phi_I, t_I \rangle \langle \phi_I, t_I \mid \Psi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \prod_{\boldsymbol{y}} d\phi(\boldsymbol{y}, t_I) \prod_{\boldsymbol{z}} d\phi(\boldsymbol{z}, t_F) \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] G[\phi_F, \phi_I; t_F - t_I]$$

と書ける．被積分関数 G の経路積分測度と $\prod_{\boldsymbol{y}} d\phi(\boldsymbol{y}, t_I) \prod_{\boldsymbol{z}} d\phi(\boldsymbol{z}, t_F)$ を全ていっしょにして改めて $\mathfrak{D}\phi$ と記すことにすると，

$$G[\Psi_F, \Psi_I; t_F - t_I] = \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x] \qquad (7\text{-}25)$$

が得られる．これを用いて場の理論における一般化 Green 関数は次のように定義される．

$$G^{\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_K}[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; x_1, x_2, \cdots, x_K]$$
$$\equiv \frac{\langle \Psi_F, t_F \mid T\widehat{\phi}^{\ell_1}(x_1)\widehat{\phi}^{\ell_2}(x_2) \cdots \widehat{\phi}^{\ell_K}(x_K) \mid \Psi_I, t_I \rangle}{G[\Psi_F, \Psi_I; t_F - t_I]} \qquad (7\text{-}26)$$

分子の時間順序積が $(1, 2, \cdots, K)$ の置換 σ によって

$$T\widehat{\phi}^{\ell_1}(\boldsymbol{x}_1, t_1)\widehat{\phi}^{\ell_2}(\boldsymbol{x}_2, t_2) \cdots \widehat{\phi}^{\ell_K}(\boldsymbol{x}_K, t_K)$$
$$= \widehat{\phi}^{\ell_{\sigma(1)}}(\boldsymbol{x}_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)})\widehat{\phi}^{\ell_{\sigma(2)}}(\boldsymbol{x}_{\sigma(2)}, t_{\sigma(2)}) \cdots \widehat{\phi}^{\ell_{\sigma(K)}}(\boldsymbol{x}_{\sigma(K)}, t_{\sigma(K)})$$
$$= \widehat{\phi}^{\ell_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)})\widehat{\phi}^{\ell_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \widehat{\phi}^{\ell_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)})$$

但し，　$t_F > t_{\sigma(1)} > \cdots > t_{\sigma(K)} > t_I$

となったとすると，2章と同様にして

$$\langle \Psi_F, t_F \mid T\widehat{\phi}^{\ell_1}(x_1)\widehat{\phi}^{\ell_2}(x_2) \cdots \widehat{\phi}^{\ell_K}(x_K) \mid \Psi_I, t_I \rangle$$
$$= \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \prod_{k=1}^{K} \{\phi(x_{\sigma(k)})\}^{\ell_{\sigma(k)}} \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]$$
$$= \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \prod_{k=1}^{K} \{\phi(x_k)\}^{\ell_k} \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x] \qquad (7\text{-}27)$$

となる．従って，式 (7-26) は次のようになる．

$$G^{\ell_1 \ell_2 \cdots \ell_K}[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; x_1, x_2, \cdots, x_K]$$
$$= \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \phi^{\ell_1}(x_1)\phi^{\ell_2}(x_2) \cdots \phi^{\ell_K}(x_K) \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]}$$

(7-28)

最後に，一般化 Green 関数の生成汎関数を記しておく．外場 $J(x)$ を導入して，

$$
\begin{aligned}
&Z[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; J] \\
&= \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F]\Psi_I[\phi_I] \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F]\Psi_I[\phi_I] \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]}
\end{aligned}
\tag{7-29}
$$

とすればよい．またこれより一般化 Green 関数は

$$
\begin{aligned}
&G^{\ell_1\ell_2\cdots\ell_K}[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; x_1, \cdots, x_K] \\
&= i^{-(\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_K)} \frac{\delta^{(\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_K)} Z[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; J]}{\delta\{J(x_1)\}^{\ell_1}\delta\{J(x_2)\}^{\ell_2}\cdots\delta\{J(x_K)\}^{\ell_K}}\Bigg|_{J=0}
\end{aligned}
\tag{7-30}
$$

として与えられる．

7-3 K 点 Green 関数（K 次の T 積 Green 関数）

場の理論の摂動論において重要な役割りを演ずる K 点 Green 関数（K 次の T 積 Green 関数）を定義する．それは一般化 Green 関数の式 (7-26) において，初期状態及び終状態を系の真空状態 $|0\rangle$ にとり，更に $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_K = 1$ とおいたものである．$\widehat{H}\,|\,0\rangle = 0$ より

$$
|0, t_I\rangle = e^{i\widehat{H}t_I}\,|\,0\rangle = |0\rangle, \quad \langle 0\,|\,0\rangle = 1 \tag{7-31}
$$

に注意して，

$$
\begin{aligned}
G^{(K)}[x_1, x_2, \cdots, x_K] &= \frac{\langle 0\,|\,T\widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(x_2)\cdots\widehat{\phi}(x_K)\,|\,0\rangle}{\langle 0\,|\,0\rangle} \\
&= \langle 0\,|\,T\widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(x_2)\cdots\widehat{\phi}(x_K)\,|\,0\rangle
\end{aligned}
\tag{7-32}
$$

である．これは場の演算子の時間順序積をとり，更にその真空期待値をとったものである．特に自由場の 2 点 Green 関数 $\langle 0\,|\,T\widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(x_2)\,|\,0\rangle$ のことを Feynman 伝搬関数という．

さて，上の式 (7-32) は初期・終状態を $|0\rangle$ として式 (7-26) から求めたが，実は状態 $|\Psi_I\rangle, |\Psi_F\rangle$ がわずかでも真空状態と重なっている限り，式 (7-26) において $t_I \to -\infty$, $t_F \to \infty$ とすると式 (7-32) が得られるのである．それを示す．まず，Hamiltonian $\widehat{H}$ を

$$
\widehat{H} \longrightarrow \widehat{H}' = e^{-i\theta}\widehat{H} \quad (0 < \theta < \pi) \tag{7-33}
$$

と置き換える（もちろん計算の後，$\theta \to 0$ として元に戻す）．$\widehat{H}$ の固有ベクトルを

$|n\rangle$, 固有値を E_n とする．すなわち,

$$\widehat{H}\mid n\rangle = E_n \mid n\rangle \tag{7-34}$$

である．固有ベクトルの完全系 $\sum_n \mid n\rangle\langle n| = \widehat{I}$ を用いると，例えば

$$\begin{aligned}
\mid \Psi_I, t_I\rangle &= e^{i(e^{-i\theta}\cdot\widehat{H})t_I} \mid \Psi_I\rangle = \sum_n e^{i(e^{-i\theta}\cdot\widehat{H})t_I} \mid n\rangle\langle n \mid \Psi_I\rangle \\
&= \sum_n e^{i(e^{-i\theta}\cdot E_n)t_I} \mid n\rangle\langle n \mid \Psi_I\rangle \\
&= e^{i(e^{-i\theta}\cdot E_0)t_I} \mid 0\rangle\langle 0 \mid \Psi_I\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{i\cos\theta\cdot E_n t_I}\cdot e^{\sin\theta\cdot E_n t_I} \mid n\rangle\langle n \mid \Psi_I\rangle
\end{aligned}$$

となる．ここで，真空状態のエネルギー E_0 は0，その励起状態のエネルギーは $E_n > 0$ $(n \neq 0)$ であり，$|\Psi_I\rangle$ は真空状態と重なりをもっている，すなわち，$\langle 0 \mid \Psi_I\rangle \neq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mid \Psi_I, t_I\rangle &= \mid 0\rangle\langle 0 \mid \Psi_I\rangle + \sum_{n\neq 0} e^{i\cos\theta\cdot E_n t_I}\cdot e^{\sin\theta\cdot E_n t_I} \mid n\rangle\langle n \mid \Psi_I\rangle \\
&\underset{t_I\to-\infty}{\longrightarrow} \mid 0\rangle\langle 0 \mid \Psi_I\rangle
\end{aligned} \tag{7-35}$$

が得られる．同様にして，

$$\langle \Psi_F, t_F \mid \underset{t_F\to\infty}{\longrightarrow} \langle \Psi_F \mid 0\rangle\langle 0| \tag{7-36}$$

が得られるので，結局式(7-26)より（$\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_K = 1$ として），

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{t_I\to-\infty \\ t_F\to\infty}} G^{(K)}[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; x_1, \cdots, x_K] \\
&= \frac{\langle \Psi_F \mid 0\rangle\langle 0 \mid T\widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(x_2)\cdots\widehat{\phi}(x_K) \mid 0\rangle\langle 0 \mid \Psi_I\rangle}{\langle \Psi_F \mid 0\rangle\langle 0 \mid 0\rangle\langle 0 \mid \Psi_I\rangle} \\
&= \langle 0 \mid T\widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(x_2)\cdots\widehat{\phi}(x_K) \mid 0\rangle
\end{aligned} \tag{7-37}$$

となり，式(7-32)が導かれる．すでに θ の項は消えているので，$\theta \to 0$ としても同じ結果になる．

更に，式(7-28)からK点Green関数の経路積分表式は以下のようになる．

$$G^{(K)}[x_1, x_2, \cdots, x_K] = \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi\cdot\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_K)\cdot\exp i\int d^4x\mathcal{L}[x]}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi\exp i\int d^4x\mathcal{L}[x]} \tag{7-38}$$

そこで，境界の状態は真空状態を場の座標で表示したもの，すなわち $\langle \phi_{I,F} \mid 0 \rangle$ になっているから，経路積分測度 $\mathfrak{D}\phi$ の中に取り込んでしまった．全く同様にしてK点 Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ は，式 (7-29) より

$$Z[J] = \frac{\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}}{\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]} \tag{7-39}$$

となる．ここで，$Z[J=0]=1$ となっていることを注意しておく．

次に，式 (7-33) の特別の場合として $\theta = \frac{\pi}{2}$ としてみる．$0 < \theta < \pi$ であるから，これは許される．このことはまた，it を実パラメータに置き換える（t を複素数化する）ことに相当することから，Euclid 化という．式 (7-33) より，

$$\widehat{H} \longrightarrow \widehat{H}' = -i\widehat{H} \tag{7-40}$$

であるから，種々の Green 関数に現われる時間推進演算子は，

$$e^{i\widehat{H}t} \longrightarrow e^{i\widehat{H}'t} = e^{\widehat{H}t}$$

t：実パラメータ

となる．このことは裏を返せば，$\widehat{H}$ はそのままにしておいて，$it \to \tau$（実パラメータ）と置き換えることに相当する．つまり，

$$e^{i\widehat{H}t} \longrightarrow e^{\widehat{H}\tau}$$

τ：実パラメータ

である．このとき，例えば Klein-Gordon 場の K 点 Green 関数の指数部は，

$$\begin{aligned}\exp i \int dt d^3x \mathcal{L}[x] &\to \exp \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left\{ i\frac{\partial}{\partial\tau}\phi \cdot i\frac{\partial}{\partial\tau}\phi + \partial_k\phi\partial^k\phi - m^2\phi^2 \right\} \\ &= \exp \left[- \int d\tau d^3x \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\phi \right)^2 + \nabla\phi\cdot\nabla\phi + m^2\phi^2 \right\} \right]\end{aligned}$$

となり，ϕ の増大と共に減少していくことがわかる．これは経路積分として性質がよいということである．実は，このように Euclid 化を行なった後の経路積分測度は，Wiener 測度となり，経路積分は Wiener 積分として厳密に定式化できるのである．残念ながら元の経路積分は，現在のところ数学的には厳密な定式化が完成していない．従って，Euclid 化した後で計算を実行し，後で $\theta \to 0$ として元に戻せば，現実の Minkowski 空間での結果が得られるというわけである．もちろんこれは τ を it に置き戻すことに相当する．

7-4　ϕ^3 相互作用 Lagrangian における摂動論

ここでは具体的なモデル（ϕ^3-モデル）に摂動論を適用し，その結果から Feynma
則を導く.

まず，ボソン場の Lagrangian 密度として

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x)\right) + \mathcal{L}_{\text{int}}[x] \tag{7-41}$$

を考える．ϕ^3-モデルの場合は

$$\mathcal{L}_{\text{int}}[x] = -\frac{g}{3!}\phi^3(x) \tag{7-42}$$

とすればよい．ここで，境界上の表面積分は作用積分の停留条件に無関係なので，
れを無視すると，

$$\int d^4x \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\phi \Box \phi\right)$$

となる．従って，K 点 Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ は，式 (7-39) から

$$Z[J] = \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \left\{-\tfrac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + \mathcal{L}_{\text{int}}[x] + J\phi\right\}}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]} \tag{7-43}$$

となる．以後，分母は

$$N \equiv \int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x] \tag{7-44}$$

と記すことにする．

(1)　自由場の場合 ($\mathcal{L}_{\text{int}}[x] = 0$)

このときの生成汎関数を $Z_0[J]$ と表わし，式 (7-44) に相当する項を N_0 とする

$$Z_0[J] = \frac{1}{N_0}\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \left\{-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + J\phi\right\} \tag{7-45}$$

である．ここで，

$$i(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) = \delta^4(x-y) \tag{7-46}$$

を満たす Green 関数 $\Delta_F(x-y)$ を導入する．その具体形は

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2}$$

である．但し，$k(x-y) \equiv k_\mu(x^\mu - y^\mu)$．これを用いると，

$$
\begin{aligned}
& i(\Box + m^2) \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \\
&= \int d^4y \left\{ i(\Box + m^2) \Delta_F(x-y) \right\} J(y) \\
&= \int d^4y \delta^4(x-y) J(y) = J(x)
\end{aligned} \tag{7-47}
$$

となる．このことから，

$$
\begin{aligned}
& \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) + J(x)\phi(x) \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} \left(\phi(x) - i \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \right) (\Box + m^2) \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left(\phi(x) - i \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \right) \right\} \\
&\quad + \frac{i}{2} \int d^4x\, d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)
\end{aligned} \tag{7-48}
$$

が言える．なぜならば，

式 (7-48) の右辺

$$
\begin{aligned}
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) i(\Box + m^2)\phi(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\phi(x) i(\Box + m^2) \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) \\
&\quad \left. - \frac{i}{2} \int d^4y \Delta_F(x-y) J(y) i(\Box + m^2) \int d^4z \Delta_F(x-z) J(z) \right\} \\
&\quad + \frac{i}{2} \int d^4x\, d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \\
&= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\phi(x)(\Box + m^2)\phi(x) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x\, d^4y \left\{ i(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) \right\} J(y)\phi(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) J(x) - \frac{i}{2} \int d^4x\, d^4y \Delta_F(x-y) J(y) J(x)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{i}{2}\int d^4x\,d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)$$

$$=\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\phi(x)(\Box+m^2)\phi(x)\right\}+\frac{1}{2}\int d^4xJ(x)\phi(x)$$

$$+\frac{1}{2}\int d^4xJ(x)\phi(x)$$

$$=\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\phi(x)(\Box+m^2)\phi(x)+J(x)\phi(x)\right\}$$

$= 式(7-48)の左辺$

となっているからである．途中，部分積分を行なって

$$\int d^4x\,d^4y\Delta_F(x-y)J(y)i(\Box+m^2)\phi(x)$$

$$=\int d^4x\,d^4y\left\{i(\Box+m^2)\Delta_F(x-y)\right\}J(y)\phi(x)$$

とした．さて，

$$\phi'(x)\equiv\phi(x)-i\int d^4y\Delta_F(x-y)J(y) \tag{7-49}$$

とおくと，式(7-48)を用いて $Z_0[J]$ は次のように書き換えられる．

$$Z_0[J]=\frac{1}{N_0}\int\mathfrak{D}\phi\exp i\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\phi'(x)(\Box+m^2)\phi'(x)\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\int d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}$$

$$=\frac{1}{N_0}\left\{\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\,d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}$$

$$\times\int\mathfrak{D}\phi'\exp i\int d^4x\left\{-\frac{1}{2}\phi'(x)(\Box+m^2)\phi'(x)\right\}$$

$$=\frac{1}{N_0}\left\{\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\,d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}N_0$$

$$=\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\,d^4yJ(x)\Delta_F(x-y)J(y) \tag{7-50}$$

式(7-49)の変数変換に対して経路積分測度は不変である，すなわち $\mathfrak{D}\phi'=\mathfrak{D}\phi$ あるという事実を用いている．式(7-49)に現われている

$$\phi_c(x)\equiv i\int d^4y\Delta_F(x-y)J(y) \tag{7-51}$$

は，式 (7-47) からわかるように外場 (source) があるときの Klein-Gordon 方程式

$$(\Box + m^2)\phi_c(x) = J(x)$$

の解になっており，古典経路を表わしている．従って，3 章の調和振動子のところで論じたように，$\mathfrak{D}\phi' = \mathfrak{D}\phi$ が言えるのである．

式 (7-50) で得た $Z_0[J]$ に式 (7-30) を適用すると，自由場の 2 点 Green 関数が得られる．それを示す．まず，式 (7-30)，(7-32) より

$$G_0^{(2)}[x,y] = \langle 0 \mid T\widehat{\phi}(x)\widehat{\phi}(y) \mid 0\rangle_0 = i^{-2}\frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} Z_0[J]\Big|_{J=0} \qquad (7-52)$$

である．$Z_0[J]$ は

$$Z_0[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i^2}{2}\right)^n \left\{\int d^4x\, d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right\}^n$$

と書けるから，微分の後 $J=0$ とすることに注意すると，この中で生き残る項は J の 2 次の項 ($n=1$ の項)

$$Z_0^{(2)}[J] = \frac{i^2}{2}\int d^4x\, d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)$$

のみであることがわかる．従って，汎関数微分は被積分関数の微分であるということを思い起こして，

$$\begin{aligned} G_0^{(2)}[x,y] &= i^{-2}\frac{\delta^2}{\delta J(x)\delta J(y)} Z_0^{(2)}[J] = i^{-2}i^2\frac{\delta}{\delta J(x)}\int d^4x J(x)\Delta_F(x-y) \\ &= \Delta_F(x-y) \end{aligned} \qquad (7-53)$$

となる．この 2 点 Green 関数のことを Feynman 伝搬関数というのである．

(2) 相互作用がある場合 ($\mathcal{L}_{\mathrm{int}}[x] \neq 0$)

生成汎関数 $Z[J]$ は

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \left\{-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi) + J\phi\right\} \qquad (7-54)$$

であるが，変分の計算から明らかなように

$$\phi(x)\left\{\exp i\int d^4x J(x)\phi(x)\right\} = i^{-1}\frac{\delta}{\delta J(x)}\left\{\exp i\int d^4x J(x)\phi(x)\right\} \qquad (7-55)$$

すなわち，

$$\phi \longleftrightarrow i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}$$

が成立しているので,

$$Z[J] = \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \left\{-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\} e^{i\int d^4x J\phi}$$

$$= \left\{\exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\}$$

$$\cdot \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \left\{-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + J\phi\right\}$$

となる．ここで，式 (7-45)，(7-50) を用いると

$$Z[J] = \left\{\exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\}\frac{N_0}{N} Z_0[J]$$

$$= C\left\{\exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right\}$$

$$\cdot \exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\, d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)$$

が得られる．但し，$C \equiv N_0/N$ とした．更に，一般に

$$K\left[i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right] S[\phi] \exp i \int d^4x J\phi \,\bigg|_{\phi=0}$$

$$= K\left[i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right] S\left[i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right] \exp i \int d^4x J\phi \,\bigg|_{\phi=0}$$

$$= S\left[i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right] K\left[i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right] \exp i \int d^4x J\phi \,\bigg|_{\phi=0}$$

$$= S\left[i^{-1}\frac{\delta}{\delta J}\right] K[J]$$

が成立することに注意すると，結局

$$Z[J] = C\left\{\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\, d^4y \left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Delta_F(x-y)\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}$$

$$\cdot \exp i \int d^4x\{\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi) + J\phi\}\,\bigg|_{\phi=0}$$

となる．ここで，$Z[J=0]=1$ を利用すると,

$$C = \left[\left\{\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\, d^4y \left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Delta_F(x-y)\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}\right.$$

$$\left.\cdot \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi)\,\bigg|_{\phi=0}\right]^{-1}$$

となるので，これを代入して

$$Z[J]=\frac{\left\{\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\,d^4y\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Delta_F(x-y)\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}\cdot\exp i\int d^4x\{\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)+J\phi\}\Big|_{\phi=0}}{\left\{\exp\frac{i^2}{2}\int d^4x\,d^4y\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\Delta_F(x-y)\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\phi}\right)\right\}\cdot\exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)\Big|_{\phi=0}}\qquad(7\text{-}56)$$

が得られる．これが摂動論を議論するときの基本式となる．ここで式を簡略化するために，縮約記号

$$\langle S[\phi]\rangle_{\rm con}\equiv\left\{\exp\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\right\}S[\phi]\Big|_{\phi=0}\qquad(7\text{-}57)$$

を導入する．添字の "con" は contraction（縮約）の意味である．そうすると，

$$Z[J]=\frac{\left\langle\exp i\int d^4x\{\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)+J\phi\}\right\rangle_{\rm con}}{\left\langle\exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)\right\rangle_{\rm con}}\qquad(7\text{-}58)$$

と書ける．ここで，$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\rm con}$ を考えてみる．ϕ が二つだけなので，$\delta/\delta\phi$ を含む高次の項（3 次以上の項）は 0 となることから，

$$\begin{aligned}\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\rm con}&=\left\{\exp\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\right\}\phi(x_1)\phi(x_2)\Big|_{\phi=0}\\&=\left(1+\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\right)\phi(x_1)\phi(x_2)\Big|_{\phi=0}\\&=\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\phi(y)}\phi(x_1)\phi(x_2)\Big|_{\phi=0}\end{aligned}$$

が得られる．6 章の式 (6-39) を 4 次元に拡張した演算（これは汎関数微分である）により，

$$\begin{aligned}&\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\rm con}\\&\quad=\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-y)\delta^4(x_1-y)\phi(x_2)\\&\qquad\qquad+\frac{1}{2}\int d^4x\,d^4y\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-y)\phi(x_1)\delta^4(x_2-y)\\&\quad=\frac{1}{2}\int d^4x\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-x_1)\phi(x_2)\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\int d^4x\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Delta_F(x-x_2)\phi(x_1)$$

$$=\frac{1}{2}\Delta_F(x_2-x_1)+\frac{1}{2}\Delta_F(x_1-x_2)$$

$$=\Delta_F(x_1-x_2) \qquad (7-59)$$

となる．ここで，Δ_F の性質

$$\Delta_F(x_2-x_1)=\Delta_F(x_1-x_2)$$

を用いた．このように，$\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ は 2 つずつ ϕ を消去して代わりに Δ_F を代入してい く操作を行なうブラケットである．この操作のことを縮約という．

更に，式 (7－52),(7－53) と比較して

$$\langle 0\mid T\widehat{\phi}(x)\widehat{\phi}(y)\mid 0\rangle_0=\Delta_F(x-y)=\langle\phi(x)\phi(y)\rangle_{\rm con} \qquad (7-60)$$

となっていることを注意しておく．

最後に，式 (7－58) の分母について簡単な説明を加えておく．式から明らかなよ に外場 J が入っていないので，Feynman ダイアグラム（後程出てくる）を描いた き，それは外場とつながっていないダイアグラム（真空泡ダイアグラムという）に 応している．一方，分子は外場とつながっているダイアグラムからの寄与と真空泡 イアグラムからの寄与の積になっている．このことから，$Z[J]$ は全て外場とつなが たダイアグラムに対応していることになる．

(3) ϕ^3-モデル $\left(\mathcal{L}_{\rm int}[x]=-\frac{g}{3!}\phi^3(x)\right)$

具体的な Lagrangian にこれまでの手法を適用して摂動展開を試みる．後の量子 磁力学への応用を念頭に置いて，外場 J の 2 次の項を考察することにする．また， 空泡ダイアグラムは最初から考えないことにして式 (7－58) の分母は無視する．そ すると式 (7－58) から

$$Z[J]=\left\langle\exp i\int d^4x\{\mathcal{L}_{\rm int}[x]+J(x)\phi(x)\}\right\rangle_{\rm con}$$

$$=\left\langle e^{i\int d^4xJ\phi}\cdot e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)}\right\rangle_{\rm con}$$

$$=\left\langle\sum_{K=0}^{\infty}\frac{i^K}{K!}\int d^4x_1\cdots d^4x_KJ(x_1)\phi(x_1)\cdots J(x_K)\phi(x_K)e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)}\right\rangle_{\rm co}$$

が得られるが，$\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ は ϕ にのみ作用するのであるから，それ以外の項はブラケッ

の外に出すことができて，

$$Z[J]=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{i^K}{K!}\int d^4x_1\cdots d^4x_K J(x_1)\cdots J(x_K)$$
$$\times\left\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_K)e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)}\right\rangle_{\rm con} \qquad (7-61)$$

となる．この右辺から J の 2 次の項 ($J(x_1)J(x_2)$ の項) を抽出し，それを $Z^{(2)}[J]$ とすると，

$$Z^{(2)}[J]=\frac{i^2}{2!}\int d^4x_1d^4x_2J(x_1)J(x_2)\left\langle\phi(x_1)\phi(x_2)e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)}\right\rangle_{\rm con} \qquad (7-62)$$

となる．

ここで，元の生成汎関数と K 点 Green 関数の定義式 (7-39),(7-38) に戻って，それらの間の関係式を求めてみると，

$$Z[J]=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{i^K}{K!}\int d^4x_1\cdots d^4x_K J(x_1)\cdots J(x_K)G^{(K)}[x_1,\cdots,x_K] \qquad (7-63)$$

であるから，式 (7-61),(7-62) の $\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ はそれぞれ K 点 Green 関数 $G^{(K)}[x_1,\cdots,x_K]$, 2 点 Green 関数 $G^{(2)}[x_1,x_2]$ になっていることがわかる．

さて，式 (7-62) に

$$\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)=-\frac{g}{3!}\phi^3$$

を代入し，結合定数 g が小さいとしてそのべきで展開することが摂動展開である．そのとき 2 点 Green 関数は，

$$\begin{aligned}G^{(2)}[x_1,x_2]&=\left\langle\phi(x_1)\phi(x_2)e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(\phi)}\right\rangle_{\rm con}\\&=\left\langle\phi(x_1)\phi(x_2)e^{i\int d^4x\left(-\frac{g}{3!}\phi^3\right)}\right\rangle_{\rm con}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!}\int d^4y_1\cdots d^4y_m\Big\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\left(-\frac{g}{3!}\phi^3(y_1)\right)\\&\qquad\cdots\left(-\frac{g}{3!}\phi^3(y_m)\right)\Big\rangle_{\rm con}\end{aligned} \qquad (7-64)$$

となる．

まず，g の 0 次の項 $(m=0)$ は

$$G_0^{(2)}[x_1,x_2]=\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\rm con}=\Delta_F(x_1-x_2) \qquad (7-65)$$

となっている．説明するまでもなく，このときの2点Green関数はFeynman伝搬関数そのものになっている．これを以下のように図示することにする．時空点 x_1, x_2 は式(7−62)より外場 $J(x_1)$ と $J(x_2)$ が存在する場所であることがわかる．外場 J を×印で表わし，その間の伝搬関数を実線で表わすことにすると，最も簡単なFeynmanダイアグラムが得られる（図7-1）．

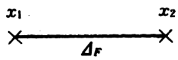


図7−1

次の摂動展開項は g の1次の項 $(m=1)$ である．すなわち

$$G_1^{(2)}[x_1,x_2]=i\int d^4y\left\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\left(-\frac{g}{3!}\phi^3(y)\right)\right\rangle_{\rm con}$$
$$=-\frac{ig}{3!}\int d^4y\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^3(y)\rangle_{\rm con} \tag{7-66}$$

である．ここで $\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ の定義式(7−57)を思い起こしてみると，それは ϕ を二つずつ消去して Δ_F に置き換える操作であった．従って今の場合，この操作の後に一つの ϕ が残ってしまい，最後に $\phi=0$ とすることで結局この項は0となってしまう．つまり，g の1次の項は存在しないのである．

g の2次の項 $(m=2)$ を考えてみると，

$$G_2^{(2)}[x_1,x_2]=\frac{i^2}{2!}\int d^4y_1d^4y_2\left\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\left(-\frac{g}{3!}\phi^3(y_1)\right)\left(-\frac{g}{3!}\phi^3(y_2)\right)\right\rangle_{\rm con}$$
$$=\frac{1}{2\cdot3!\cdot3!}\int d^4y_1d^4y_2\langle\phi(x_1)(-ig)\phi^3(y_1)(-ig)\phi^3(y_2)\phi(x_2)\rangle_{\rm con} \tag{7-67}$$

となっている．これを図示してみる．相互作用項 $-ig\phi^3$ を●印で表わすことにする．$\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ が任意の二つの ϕ を伝搬関数（実線）に変える働きをすることに注意して，まず，$\phi(x_1)$ と $\phi(y_1)$, $\phi(x_2)$ と $\phi(y_2)$ の縮約をとり，継いで残りの二つの $\phi(y_1)$ と二つの $\phi(y_2)$ の縮約をとることにすると，次のFeynmanダイアグラムが描ける(図7-2

これ以外の縮約のとり方もある．例えば，$\phi(x_1)$ と $\phi(y_1)$, $\phi(x_2)$ と $\phi(y_2)$ の縮約をとった後，二つの $\phi(y_1)$ 同士，$\phi(y_2)$ 同士の縮約をとると，図7-3のようになる．

同様にしてその他のダイアグラムも描くことができる．式(7−67)はこのようにして描かれたすべてのダイアグラムを含んでいるのである．

さて，以下では，図7-2の相互作用についてもっと詳しく調べてみることにする．

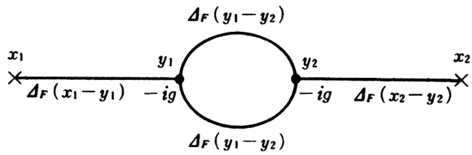


図 7-2

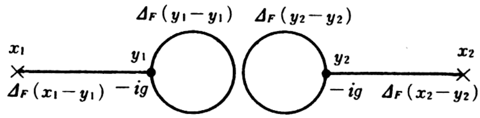


図 7-3

(7-67) の中から図 7-2 に対応するものを抽出すると,

$$G_2^{(2)}[x_1,x_2]\Big|_{\text{type7-2}}$$
$$=C\cdot\frac{1}{2\cdot(3!)^2}\int d^4y_1d^4y_2\Delta_F(x_1-y_1)(-ig)$$
$$\times\{\Delta_F(y_1-y_2)\}^2(-ig)\Delta_F(y_2-x_2) \qquad (7-68)$$

となる. 右辺に係数 C がかかっているが, これは式とダイアグラムが 1 対 1 対応していないために生じたものである. これを求めてみる. まず, 図 7-2 のタイプのダイアグラムとしては, y_1 と y_2 を入れ換えたものが存在する. 次に $\phi(x_1)$ と縮約する $\phi(y_1)$ を選ぶのに 3 通り, 同様に $\phi(x_2)$ と縮約する $\phi(y_2)$ を選ぶのに 3 通り, 更に残りの $\phi(y_1)$ と $\phi(y_2)$ とを縮約するのに 2 通りのし方がある. 従って, 図 7-2 のタイプのダイアグラムは全部で $2\times3\times3\times2$ 個存在する. これが係数 C である. よって, 式 (7-68) は

$$G_2^{(2)}[x_1,x_2]\Big|_{\text{type7-2}}$$
$$=\frac{1}{2}\int d^4y_1d^4y_2\Delta_F(x_1-y_1)(-ig)\{\Delta_F(y_1-y_2)\}^2(-ig)\Delta_F(y_2-x_2)$$
$$(7-68)'$$

となる. ここで, 消え残った係数 (1/2) のことを統計因子という. 一般に, ダイアグラムから直接導かれる式と対応する K 点 Green 関数との間には統計因子が入るのである.

(4) 運動量空間の Feynman ダイアグラム

これまでに説明してきた Feynman ダイアグラム及び 2 点 Green 関数は, その表記

からも明らかなように全て4次元時空内のものである．しかし，実際の計算は，Fouri
変換をしてから運動量空間内で実行した方が簡単かつ便利である．そもそも Feynm
が粒子間の相互作用を明示する目的で最初に描いたダイアグラムは，運動量空間内
ものである．

まず，K点 Green 関数の Fourier 変換を

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+\cdots+p_K)G^{(K)}[p_1,p_2,\cdots,p_K]$$
$$\equiv\int d^4x_1d^4x_2\cdots d^4x_K\ e^{i(p_1x_1+\cdots+p_Kx_K)}G^{(K)}[x_1,x_2,\cdots,x_K] \quad (7-69)$$

で定義する．ここで，例えば $p_1x_1\equiv p_{1\mu}x_1^\mu$ $(\mu=0,1,2,3)$ である．これまで考え
きた相互作用（図 7-2）の2点 Green 関数（式 $(7-68)'$）を上の式に代入し，運動
空間の2点 Green 関数及び Feynman ダイアグラムを求めてみる．

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)G_2^{(2)}[p_1,p_2]\Big|_{\text{type7-2}}$$
$$\equiv\int d^4x_1d^4x_2\ e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}G_2^{(2)}[x_1,x_2]\Big|_{\text{type7-2}}$$
$$=\int d^4x_1d^4x_2\ e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}$$
$$\times\frac{1}{2}\int d^4y_1d^4y_2\Delta_F(x_1-y_1)(-ig)\left\{\Delta_F(y_1-y_2)\right\}^2(-ig)\Delta_F(y_2-x_2$$

ここで，Klein-Gordon 場の Feynman 伝搬関数 Δ_F の具体形

$$\Delta_F(x-y)=\int\frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2-m^2}$$

を代入する．簡単のために被積分関数分母の $i\varepsilon$ は省略した．そうすると，

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)G_2^{(2)}[p_1,p_2]\Big|_{\text{type7-2}}$$
$$=\frac{1}{2}\int d^4x_1d^4x_2\int d^4y_1d^4y_2\ e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}\int\frac{id^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_1(x_1-y_1)}}{k_1^2-m^2}(-ig)$$
$$\times\int\frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_a(y_1-y_2)}}{k_a^2-m^2}\int\frac{id^4k_b}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_b(y_1-y_2)}}{k_b^2-m^2}(-ig)$$
$$\times\int\frac{id^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ik_2(y_2-x_2)}}{k_2^2-m^2}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_b}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_1^2-m^2}(-ig)\frac{1}{k_a^2-m^2}\frac{1}{k_b^2-m^2}$$
$$\times(-ig)\frac{1}{k_2^2-m^2}$$

$$
\times \int d^4x_1 d^4x_2 d^4y_1 d^4y_2 \; e^{i(p_1-k_1)x_1} \; e^{i(p_2+k_2)x_2} \; e^{i(k_1-k_a-k_b)y_1} \; e^{i(k_a+k_b-k_2)y_2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int \frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_b}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_1^2-m^2} \\
&\quad \times (-ig)\frac{1}{k_a^2-m^2}\frac{1}{k_b^2-m^2}(-ig)\frac{1}{k_2^2-m^2} \\
&\quad \times (2\pi)^4\delta^4(p_1-k_1)\;(2\pi)^4\delta^4(p_2+k_2)\;(2\pi)^4\delta^4(k_1-k_a-k_b) \\
&\quad \times (2\pi)^4\delta^4(k_a+k_b-k_2) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_b}{(2\pi)^4}\frac{i}{p_1^2-m^2}(-ig)\frac{1}{k_a^2-m^2}\frac{1}{k_b^2-m^2}(-ig)\frac{i}{p_2^2-m^2} \\
&\quad \times (2\pi)^4\delta^4(p_1-k_a-k_b)\;(2\pi)^4\delta^4(k_a+k_b+p_2) \\
&= \frac{1}{2}\frac{i}{p_1^2-m^2}(-ig)\int \frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{1}{k_a^2-m^2}\frac{1}{(p_1-k_a)^2-m^2}(-ig)\frac{i}{p_2^2-m^2} \\
&\quad \times i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)
\end{aligned}
\tag{7-70}
$$

が得られる．$k_a = k$ と置き直すと，

$$
\begin{aligned}
&i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)G_2^{(2)}[p_1,p_2]\Big|_{\text{type7-2}} \\
&\quad = i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)\frac{1}{2}\frac{i}{p_1^2-m^2}(-ig) \\
&\quad\quad \times \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2}\frac{1}{(p_1-k)^2-m^2}(-ig)\frac{i}{p_2^2-m^2}
\end{aligned}
\tag{7-71}
$$

となるから，結局

$$
\begin{aligned}
G_2^{(2)}[p_1,p_2]\Big|_{\text{type7-2}} &= \frac{1}{2}\frac{i}{p_1^2-m^2}(-ig) \\
&\quad \times \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2}\frac{1}{(p_1-k)^2-m^2}(-ig)\frac{i}{p_2^2-m^2}
\end{aligned}
\tag{7-72}
$$

が得られる．

これから，運動量空間の Feynman ダイアグラムを描いてみると，図 7-4 のようになる．

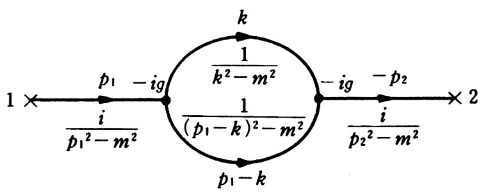


図 7-4

4元運動量の保存 $p_1 = -p_2$ は $\delta^4(p_1 + p_2)$ で保証されている．また，ダイアグラ
がループになっていて，運動量が定まらないものについては，その4次元積分 $\int d^4$
を実行する．

更に，g の4次以上の項 $(m \geqq 4)$ も同様にして計算できるが，Feynman則を得
ためにはこれまでの説明で十分であろうから，それについては省略する．

(5)　ボソン場のFeynman則

Feynman則とは，計算すべき相互作用をダイアグラム化し，それから運動量空間
K点Green関数を導き出す規則のことである．式(7-72)の導出過程を思い浮かべ
がらFeynman則をまとめてみる．

① 端点に相当するK個の×印を描き，それらに番号を付す．それらの間に相互用を明示する頂点の ● 印を描く．×印からは1本の実線，● 印からは相互作用の場の次数（例えば，$\mathcal{L}_{\rm int}(\phi) = -\frac{g}{3!}\phi^3$ ならば3）だけの実線が出るとする．不足なくこれらの点を結ぶ．各実線には，運動量保存則を満たすように運動量決め，それを付す．

　こうしてFeynmanダイアグラムが出き上がる．

② i 番目の×印とつながっている実線 p_i（外線という）には，運動量空間の伝関数 $i/(p_i^2 - m^2)$ を対応させる．

③ ● 印間を結んでいる実線 k（内線という）には，伝搬関数 $1/(k^2 - m^2)$ を対させる．

④ 各頂点には結合定数 $-ig$ を対応させる．

⑤ ループ運動量 k については4次元積分 $\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}$ を実行する．

⑥ ②, ③, ④の各項をかけ合わせ，必要なところに⑤の積分記号を入れて，最後①で描いたダイアグラムの統計因子をかける．

以上である．式(7-58)から丹念に運動量空間の2点Green関数，式(7-72)
導いたが，Feynman則を用いれば簡単に式(7-72)が得られることがわかると思

これまでずっと図7-2を考えてきたが，図7-3のような分離したダイアグラムも
点Green関数に含まれている．このような場合には，片方の連結成分のみを計算し
おけば十分である．次に，連結ダイアグラムに関連したK点Green関数について
言述べておく．

(6)　連結したK点Green関数

連結ダイアグラム（Feynmanダイアグラムを描いたときに，二つ以上のパート

分離していないもの）のみの寄与からなるK点 Green 関数のことを，連結したK点 Green 関数という．$Z[J]$ から

$$Z[J] \equiv e^{iW[J]} \tag{7-73}$$

として $W[J]$ なる汎関数を定義すると，これから生成されるK点 Green 関数は連結した Green 関数になっている．それは次のことから明らかであろう．

まず，一つの連結ダイアグラムから $Z[J]$ への寄与を A とする．これが例えば二つあったとすると（図 7-3 は正にこれに相当する），場の演算子の真空期待値であるK点 Green 関数はその積 A^2 となる．ところが，これら二つのダイアグラムは時空点で指定された二つのパート A_1, A_2 として区別でき，2 通りの積のうちの一つ，例えば A_1A_2 のみが $Z[J]$ へ寄与することになる．すなわち

$$A_1A_2 = \frac{1}{2}A^2$$

である．このことを推し進めて，連結ダイアグラムが n 個あった場合の $Z[J]$ への寄与 $A_1A_2\cdots A_n$ は，

$$A_1A_2\cdots A_n = \frac{1}{n!}A^n$$

と表わされる．こうして全ダイアグラムの寄与を集めた $Z[J]$ は，

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n = e^A \tag{7-74}$$

となる．この A に相当するものが式 (7-73) の $iW[J]$ である．i が入っているのは，有効作用を定義する Legendre 変換（式 (10-4)）において i が現われないようにするためである．

(7) まとめ

ここでは，これまでに得られた主要な式をまとめてもう一度記しておく．まず，K点 Green 関数 $G^{(K)}[x_1, x_2, \cdots, x_K]$ は次のように表わされる．

$$G^{(K)}[x_1, x_2, \cdots, x_K] = \langle 0 \mid T\widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(x_2)\cdots\widehat{\phi}(x_K) \mid 0\rangle$$

$$= \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi\,\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_K)\exp i\int d^4x\mathcal{L}[x]}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \exp i\int d^4x\mathcal{L}[x]}$$

$$= \frac{\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_K)\exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\rangle_{\mathrm{con}}}{\langle \exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\rangle_{\mathrm{con}}} \tag{7-75}$$

次に，K 点 Green 関数の生成汎関数 $Z[J]$ は

$$Z[J] = \left\langle 0 \left| T\exp i\int d^4x J(x)\widehat{\phi}(x) \right| 0 \right\rangle$$

$$= \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \exp i\int d^4x \{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\phi \exp i\int d^4x\mathcal{L}[x]}$$

$$= \frac{\left\langle \exp i\int d^4x \{\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi) + J(x)\phi(x)\}\right\rangle_{\mathrm{con}}}{\left\langle \exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)\right\rangle_{\mathrm{con}}} \tag{7-76}$$

である．

これらを比較してみると明らかなように，$G^{(K)}[x_1,\cdots,x_K]$ の $\phi(x_1)\cdots\phi(x_K)$ $Z[J]$ では $\exp i\int d^4xJ\phi$ になっている．また縮約の式は，その上の式における $\mathcal{L}[x]$ $\mathcal{L}_{\mathrm{int}}(\phi)$ に置き換え，経路積分 $\int\mathfrak{D}\phi(\cdot)$ を $\langle\cdot\rangle_{\mathrm{con}}$ に置き換えればよいことがわか

7-5　フェルミオン場の経路積分

スピンが半整数の粒子は，Fermi-Dirac 統計に従うのでフェルミオン (Fermion) 呼ばれる．フェルミオンの中で最も小さなスピン $\frac{1}{2}$ を持っている粒子は Dirac 場の 子であり，その Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}[x] = \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \tag{7-77}$$

で与えられる．ここで γ^μ は Dirac 代数（Minkowski 空間の Clifford 代数）の元て り，反交換関係

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{7-78}$$

を満たしている．$g^{\mu\nu}$ は 4 次元時空（Minkowski 空間）の計量テンソルである．ま $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ であり，† は Hermite 共役を意味する．ψ は複素 4 成分量であり，ス ノールと呼ばれる．更に ψ と $\overline{\psi}$ はそれぞれ Grassmann 数の場であり，複素場て ることから独立であると考えることができる．

さて，式 (7-77) に Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\overline{\psi}} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_\mu\overline{\psi}} = \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\overline{\psi}} = 0$$

を適用すると,

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - m\psi(x) = 0 \tag{7-79}$$

なる Dirac 方程式が得られる．この Dirac 場 ψ は後の章で電磁場と共に主役を演ずることになる．

また，半整数スピン $\frac{3}{2}$ を持つ粒子は，Rarita-Schwinger 場の粒子であり，超重力理論で必要とされる重力微子（グラヴィティーノ）に相当する．この Lagrangian 密度は，

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\rho}(x)\gamma^{\rho\mu\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma}(x) \tag{7-80}$$

で与えられる．ψ_σ は σ の各々の値 $(0,1,2,3)$ について 4 成分を有しているスピノールであり，ベクトルとスピノールとのテンソル積になっている．また，

$$\gamma^{\rho\mu\sigma} \equiv \frac{1}{3!}(\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho} + \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu})$$

である．実は，式 (7-80) には更に反粒子が粒子に等しいという Majorana 条件がついており，ψ_σ は実場となっている．そのために，係数 $\frac{1}{2}$ が付いているのである．

式 (7-80) に Euler-Lagrange 方程式を適用すると

$$\gamma^{\rho\mu\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma}(x) = 0 \tag{7-81}$$

が得られる．

(1) 経路積分表式

ここでは，このようなフェルミオン場の経路積分表式を求めるのであるが，Rarita-Schwinger 場は結構複雑なので，Dirac 場を例にとることにする．式 (7-77) から ψ に正準共役な運動量 π_ψ は，左微分の約束にならって，

$$\pi_{\psi}(x) = i\overline{\psi}(x)\gamma^{0} = i\psi^{\dagger}(x) \tag{7-82}$$

となるので[1)]，これを用いて Hamiltonian $\widehat{H} \equiv H[\widehat{\psi}^{\dagger}, \widehat{\psi}]$ を求め，時間発展 Green 関数の基本式

$$\begin{aligned}
&G[\psi_F, \psi_I; t_F - t_I] \\
&= \langle \psi_F, t_F \mid \psi_I, t_I \rangle = \langle \psi_F \mid e^{-i\widehat{H}(t_F - t_I)} \mid \psi_I \rangle \\
&= \langle \psi_F \mid e^{-i\widehat{H}(t_F - t)} \cdot e^{-i\widehat{H}(t - t_I)} \mid \psi_I \rangle
\end{aligned}$$

---

1) Fermi 系の正準運動量は第 4 章式 (4-120) で定義される．

$$= \int \prod_x d\psi^\dagger d\psi \langle \psi_F \mid e^{-i\widehat{H}(t_F-t)} \mid \psi \rangle e^{-\int d^3x \psi^\dagger \psi} \langle \psi \mid e^{-i\widehat{H}(t-t_I)} \mid \psi_I \rangle$$

$$= \int \prod_x d\psi^\dagger d\psi G[\psi_F, \psi; t_F - t] e^{-\int d^3x \psi^\dagger \psi} G[\psi, \psi_I; t - t_I] \tag{7-83}$$

を得る．ここで，4章Fermi系のところで説明したコヒーレント状態の完全系

$$\int \prod_x d\psi^\dagger d\psi \mid \psi \rangle e^{-\int d^3x \psi^\dagger \psi} \langle \psi \mid = \widehat{I} \tag{7-84}$$

を用いていることに注意.

次に，$t_F - t_I$ を N 等分し，式(7-83)を繰り返し用いると

$$G[\psi_F, \psi_I; t_F - t_I] = G[\psi_N, \psi_0; N\varepsilon]$$

$$= \int \prod_{n=1}^{N-1} \prod_x d\psi_n^\dagger d\psi_n G[\psi_{n+1}, \psi_n; \varepsilon] e^{-\int d^3x \psi_n^\dagger \psi_n} G[\psi_1, \psi_0; \varepsilon] \tag{7-85}$$

が得られる．各記号の使用法はボソン場のときと同様である．微小時間のGreen関数 $G[\psi_{n+1}, \psi_n; \varepsilon]$ は，Fermi系の議論を思い起こして，

$$G[\psi_{n+1}, \psi_n; \varepsilon] \cong \exp \int d^3x \{\psi_{n+1}^\dagger \psi_n - i\varepsilon \mathcal{H}(\psi_{n+1}^\dagger, \psi_n)\} \tag{7-86}$$

となることがわかる．これを式(7-85)に代入すると，

$$G[\psi_F, \psi_I; t_F - t_I]$$

$$\cong \int \prod_{n=1}^{N-1} \prod_x d\psi_n^\dagger d\psi_n \exp \int d^3x \{\psi_{n+1}^\dagger \psi_n - i\varepsilon \mathcal{H}(\psi_{n+1}^\dagger, \psi_n) - \psi_n^\dagger \psi_n\}$$

$$\times \exp \int d^3x \{\psi_1^\dagger \psi_0 - i\varepsilon \mathcal{H}(\psi_1^\dagger, \psi_0)\}$$

が得られるが，ここで指数部の $\mathcal{H}(\psi^\dagger, \psi)$ 以外の項をみてみると，

$$-\sum_{n=1}^{N-1} \psi_n^\dagger \psi_n + \sum_{n=1}^{N-1} \psi_{n+1}^\dagger \psi_n + \psi_1^\dagger \psi_0$$

$$= \psi_N^\dagger \psi_N - \sum_{n=1}^{N} \psi_n^\dagger \psi_n + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^\dagger \psi_n$$

$$= \psi_N^\dagger \psi_N - \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^\dagger \psi_{n+1} + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^\dagger \psi_n$$

$$= \psi_N^\dagger \psi_N - \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1}^\dagger (\psi_{n+1} - \psi_n)$$

であるので，結局時間発展 Green 関数は，

$$\begin{aligned}
&G[\psi_F, \psi_I; t_F - t_I] \\
&= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} \prod_{\boldsymbol{x}} d\psi_n^\dagger d\psi_n \right) \left\{ \exp \int d^3x \psi_N^\dagger \psi_N \right\} \\
&\quad \times \left[\exp \left\{ - \sum_{n=0}^{N-1} \int d^3x \left(\psi_{n+1}^\dagger (\psi_{n+1} - \psi_n) + i\varepsilon \mathcal{H}(\psi_{n+1}^\dagger, \psi_n) \right) \right\} \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{n=1}^{N-1} \prod_{\boldsymbol{x}} d\psi_n^\dagger d\psi_n \right) \left\{ \exp \int d^3x \psi_N^\dagger \psi_N \right\} \\
&\quad \times \left\{ \exp i \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon \int d^3x \left(i\psi_{n+1}^\dagger \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\varepsilon} - \mathcal{H}(\psi_{n+1}^\dagger, \psi_n) \right) \right\} \\
&= \int \mathfrak{D}\psi^\dagger \mathfrak{D}\psi \exp i \int d^4x \{ i\psi^\dagger \dot{\psi} - \mathcal{H}(\psi^\dagger, \psi) \} \\
&= \int \mathfrak{D}\overline{\psi} \mathfrak{D}\psi \exp i \int d^4x \mathcal{L}(\overline{\psi}, \psi)
\end{aligned} \tag{7-87}$$

となる．最後のところは，$\det\gamma^0 = 1$ となることを利用して，

$$\int \mathfrak{D}\psi^\dagger \mathfrak{D}\psi = \int \mathfrak{D}\overline{\psi} \mathfrak{D}\psi$$

とした．

(2) 生成汎関数とループダイアグラム

ボソン場のときと全く同様にして，K 点 Green 関数の生成汎関数 Z が得られる．Grassmann 数の外場 $\eta(x)$, $\overline{\eta}(x)$ を導入して，

$$\begin{aligned}
Z[\eta, \overline{\eta}] &= \frac{\int \mathfrak{D}\overline{\psi} \mathfrak{D}\psi \exp i \int d^4x \{ \mathcal{L}[x] + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta \}}{\int \mathfrak{D}\overline{\psi} \mathfrak{D}\psi \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]} \\
&= \frac{\left\langle \exp i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{\text{int}}(\overline{\psi}, \psi) + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta \} \right\rangle_{\text{con}}}{\left\langle \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(\overline{\psi}, \psi) \right\rangle_{\text{con}}}
\end{aligned} \tag{7-88}$$

である．但し，今の場合は

$$\langle S[\overline{\psi}, \psi] \rangle_{\text{con}}$$

$$\equiv \left\{ \exp\left(-\int d^4x\, d^4y \frac{\delta}{\delta\psi(x)} S_F(x-y) \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(y)} \right) \right\} S[\overline{\psi}, \psi] \Big|_{\overline{\psi}=\psi=0} \tag{7-89}$$

と定義されている．$S_F(x-y)$ は Dirac 場の Feynman 伝搬関数であり，

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_F(x-y) = i\delta^4(x-y) \tag{7-90}$$

を満たしている．具体形は

$$S_F(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\not{k} - m} \tag{7-91}$$

である．そこで，$\not{k} \equiv \gamma^\mu k_\mu$ とした．

Feynman 則を得るための基礎となる縮約の式 $\langle \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2) \rangle_{\rm con}$ を計算してみる．式 (7-89) から，

$$\begin{aligned}
&\langle \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2) \rangle_{\rm con} \\
&\quad = -\int d^4x\, d^4y \frac{\delta}{\delta\psi(x)} S_F(x-y) \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(y)} \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2) \Big|_{\psi=\overline{\psi}=0} \\
&\quad = \int d^4x\, d^4y \frac{\delta}{\delta\psi(x)} S_F(x-y) \delta^4(x_2-y) \psi(x_1) \\
&\quad = \int d^4x \frac{\delta}{\delta\psi(x)} S_F(x-x_2) \psi(x_1) \\
&\quad = S_F(x_1 - x_2)
\end{aligned} \tag{7-92}$$

が得られる．ここで，Grassmann 数の演算に関する注意を述べておく．被変分関数を一番左に移動してから演算を行なうとして，並びの順によって − を付けることにする．ここでも左微分の約束に従う．もちろん右微分の約束をとっても同じ結果が得られるが，Grassmann 数の演算は左微分で統一することにする．上の例で言えば，

$$\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(y)} [\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)] = -\delta^4(x_2-y)\psi(x_1)$$

である．右辺に − がついている点に注意．このように，Dirac 場 $\psi, \overline{\psi}$ は Grassmann 数の場であるため，反可換であるということにいつでも注意を払う必要がある．

式 (7-92) をよくみてみると，$\langle \cdot \rangle_{\rm con}$ の中が $\psi\overline{\psi}$ の順序になっているときに伝搬関数 S_F が導かれている．従ってもし，$\langle \cdot \rangle_{\rm con}$ の中の Dirac 場の順序がこのようになっていないときは，入れ換えを行なう必要がある．具体例でそれを示す．電磁相互作用（今の場合，Dirac 場 ψ と電磁場 A_μ との相互作用）を考え，その Lagrangian 密度

$\mathcal{L}_{\rm int}$ を

$$\mathcal{L}_{\rm int}(\overline{\psi},\psi,A)=\overline{\psi}e\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \tag{7-93}$$

とすると，2点 Green 関数の e の2次の項から次のループダイアグラムが描ける（図7–5）．そこで波線は電磁場の伝搬関数を表わしている．このようなループダイアグラ

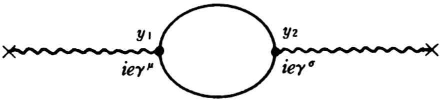


図 7－5

ムの Green 関数には，式 (7－93) から

$$\langle\overline{\psi}(y_1)ie\gamma^{\mu}\psi(y_1)\overline{\psi}(y_2)ie\gamma^{\sigma}\psi(y_2)\rangle_{\rm con} \tag{7-94}$$

という項が必ず含まれる．但し電磁場は無視した．式 (7－94) は $\overline{\psi}(y_1)$ と $\psi(y_2)$ が S_F を導く順序にはなっていない．つまり，入れ換えを行なう必要がある．そうすると，

$$\begin{aligned}&\langle\overline{\psi}(y_1)ie\gamma^{\mu}\psi(y_1)\overline{\psi}(y_2)ie\gamma^{\sigma}\psi(y_2)\rangle_{\rm con}\\&\quad=-{\rm Tr}\langle ie\gamma^{\mu}\psi(y_1)\overline{\psi}(y_2)ie\gamma^{\sigma}\psi(y_2)\overline{\psi}(y_1)\rangle_{\rm con}\end{aligned} \tag{7-95}$$

が得られる．$\psi,\overline{\psi}$ は Grassmann 数の場であるから，入れ換えによって－が出るのであり，また，ψ は4成分のスピノールであることから Tr がつくのである．c 数のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の関係式

$$\boldsymbol{a}^t\boldsymbol{b}={\rm Tr}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^t)$$

を思い起こせば，容易に理解できるであろう．以上のことから，フェルミオン場の Feynman 則が得られる．

(3) フェルミオン場の Feynman 則

ダイアグラムの描き方はボソン場のときと同様なので省略する．

① 運動量 p の外線には，運動量空間の伝搬関数 $i/(\not{p}-m)$ を対応させる．

② 運動量 k の内線には，伝搬関数 $1/(\not{k}-m)$ を対応させる．

③ 電磁相互作用の各項点には $ie\gamma^{\mu}$ を対応させる．

④ ループ運動量 k については $-{\rm Tr}$ をつけ，4次元積分 $\int\frac{id^4k}{(2\pi)^4}$ を実行する．

⑤ ①, ②, ③の各項をかけ合わせ，ループの場合は④を考慮して，最後にダイアグラムの統計因子をかける．

このFeynman則に従えば，ダイアグラムに対応するK点Green関数が容易に得られる．量子電磁力学の章のところで具体的な計算を行なうので，そこで更に理解が深まるであろう．

演習問題

1. $\mathcal{L}[x] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$, $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ から Maxwell の方程式を導出せよ．
2. 式(7-27)を導け．
3. 式(7-30)を導け．
4. $$\int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F]\Psi_I[\phi_I] \exp i \int d^4x\{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}$$
$$= \left\langle \Psi_F, t_F \left| T \exp i \int d^4x J(x)\widehat{\phi}(x) \right| \Psi_I, t_I \right\rangle$$
を示せ．
5. $$Z[J] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1)J(x_2)\cdots J(x_k)G^{(k)}[x_1, x_2, \cdots, x_k]$$
を示せ．
6. $i(\Box + m^2)\Delta_F(x-y) = \delta^4(x-y)$ を満たす $\Delta_F(x-y)$ の具体形を求めよ．
7. 式(7-75), (7-76)をもう一度確認しなさい．
8. $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S_F(x-y) = i\delta^4(x-y)$ を満たす $S_F(x-y)$ を求めよ．

第8章 電磁場と Dirac 場の量子化

量子電磁力学 (quantum electrodynamics, 略して QED) は荷電粒子と電磁場との相互作用を記述する理論であり，摂動論を用いた計算精度の高さから，これまでに人類が手中に収めた理論の中でも最良の理論であると言われている．

しかし現在では，Glashow, Weinberg 及び Salam によりこの電磁相互作用と β 崩壊を司る弱い相互作用が統一されており，電弱相互作用理論として確立している．更に電弱相互作用理論と強い相互作用を記述する理論（量子色力学）をまとめて，素粒子の「標準理論」と呼んでいる．このような立場から見れば，量子電磁力学は標準理論の一部の電弱理論のそのまた一部に過ぎないということになる．相互作用をするエネルギーが大きい場合（数 GeV 以上）には確かにその通りであるが，通常の原子間，原子内の現象のような低エネルギー領域では，長距離相互作用を行なう電磁相互作用以外は表に現われてこない．従って，低エネルギー領域においては，量子電磁力学が最良の理論であることに違いはなく，その地位は揺るがない．

以下の三つの章では，このような量子電磁力学を経路積分の応用という観点から論じることにする．また，荷電粒子の場としては電子場（陽電子も含んでいる）のみを考えることにするが，Dirac 場の粒子であるミュー粒子，タウ粒子，クォーク等についても同様の議論が成立することを付け加えておく．

8–1 ゲージ原理

ゲージ原理を一言でいうと，基本粒子の各種の相互作用を記述する理論は局所的ゲージ対称性を有していなければならない，ということである．4 次元時空の各点で，ゲージ変換のパラメータをそれぞれ独立に選択しても理論は不変に保たれるということであり，言い換えれば時空座標に付随した内部空間の座標をどのように選んでも理論は不変であるということである．

内部空間として Lie 群の一つの $U(1)$ を採用すると[1]，ゲージ原理によって電磁相

1) 厳密には，$U(1)-\mathbf{C}-$加群（複素数体 $\mathbf{C}$ そのもの）を内部空間とするのである．以下同様．

互作用の形が決定され，$SU(2)$ を選ぶと Yang-Mills 場が導出される．また，内部空間として局所 Lorentz 系を選ぶと重力場が導かれる．前に述べた電弱相互作用は，直積表現 $SU(2)\times U(1)$ からその形が決定される．他に，$SU(3)$ からは強い相互作用の形が決められる．

ここでは大局的ゲージ不変性を有する自由な Dirac 場の Lagrangian から出発し，それを局所的ゲージ不変性を満たすように書き改める．その際必然的にゲージ場としての電磁場が導入される．そして最終的に局所対称性を有する量子電磁力学の基本 Lagrangian を得る．

まず，自由 Dirac 場の Lagrangian 密度

$$\mathcal{L}[x]=\overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x) \tag{8-1}$$

を考える．これは大局的 $U(1)$ ゲージ不変性をもっている．それは，

$$\psi(x)\longrightarrow\psi'(x)=e^{-ie\alpha}\psi(x) \tag{8-2}$$

として式 (8-1) に代入してみると，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'[x]&\equiv\overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi'(x)\\&=\overline{\psi}(x)e^{ie\alpha}e^{-ie\alpha}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=\mathcal{L}[x]\end{aligned}$$

となることから明らかである．$e^{-ie\alpha}\in U(1)$（1次元のユニタリ群）であることから，式 (8-2) の変換を $U(1)$ ゲージ変換という．また e は電子の電荷であり，相互作用の結合定数でもある．

次に，大局的ゲージパラメータ α を局所的パラメータ $\alpha(x)$ に変える．それでもなおかつ $\mathcal{L}[x]$ に不変性を要求するのが，ゲージ原理である．式 (8-1) のままではこの原理を満足することはできず，他の場（これをゲージ場という）$A_\mu(x)$ を導入する必要がある．ではどのような形で導入すればよいかというと，そのための一般的処方が存在するので，それに従うことにする．まず，パラメータ $\alpha(x)$ が非常に小さいとして無限小変換

$$\psi(x)\longrightarrow\psi'(x)=(1-ie\alpha(x))\,\psi(x) \tag{8-3}$$

を考える．ここで，1 を ∂_μ に，$\alpha(x)$ を $A_\mu(x)$ に対応させて，共変微分 D_μ を

$$\partial_\mu\psi(x)\longrightarrow D_\mu\psi(x)\equiv(\partial_\mu-ieA_\mu(x))\,\psi(x) \tag{8-4}$$

と定義する．そうすると，Dirac 場とゲージ場との相互作用を記述する Lagrangian 密

度が得られる.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x] &= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= \overline{\psi}(x)i\gamma^\mu\left(\partial_\mu - ieA_\mu(x)\right)\psi(x) - m\overline{\psi}(x)\psi(x)\end{aligned} \tag{8-5}$$

式 (8-5) が局所的ゲージ不変性を満たしていることを示す. そのためには, $\psi(x)$ が

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \tag{8-6}$$

と変換すると同時に, $A_\mu(x)$ も

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x) \tag{8-7}$$

のように変換するとすればよい. 実際,

$$\begin{aligned}D'_\mu\psi'(x) &\equiv \left(\partial_\mu - ieA'_\mu(x)\right)e^{-ie\alpha(x)}\psi(x) \\ &= e^{-ie\alpha(x)}\left(\partial_\mu - ieA_\mu(x)\right)\psi(x) \\ &= e^{-ie\alpha(x)}D_\mu\psi(x)\end{aligned} \tag{8-8}$$

となることから,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'[x] &\equiv \overline{\psi}'(x)(i\gamma^\mu D'_\mu - m)\psi'(x) \\ &= \overline{\psi}(x)e^{ie\alpha(x)}e^{-ie\alpha(x)}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= \overline{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}[x]\end{aligned}$$

が示せる.

以上が, ゲージ原理から相互作用の形を決定する一般的処方せんである. 後は, 式 (8-5) に自由な電磁場の Lagrangian 密度 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$ をつけ加えればよい. すなわち, 電磁相互作用を規定する Lagrangian 密度は,

$$\mathcal{L}[x] = \overline{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{8-9}$$

となる. $F_{\mu\nu}$ が式 (8-7) のゲージ変換に対して不変であることは, 示すまでもないであろう.

この Lagrangian 密度と 5 章の拘束系の議論から, 直ちに量子電磁力学の経路積分表式が得られるが, その前に自由 Dirac 場と電磁場の正準量子化法に触れておくことも有意義であろうから, 以下の二つの節ではそれを簡単に述べることにする.

8-2 自由 Dirac 場の正準量子化

自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は式 (8-1) で与えられる. 従って, ψ に正準共

役な運動量 π_ψ は，7 章の式 (7−82) より

$$\pi_\psi(x) = i\psi^\dagger(x) \tag{8-10}$$

となる．正準量子化は，$\widehat{\psi}$ と $\widehat{\pi}_\psi$ の間に同時刻反交換関係

$$\left.\begin{aligned} \{\widehat{\psi}_a(x), \widehat{\pi}_\psi^b(y)\} &= \{\widehat{\psi}_a(x), i\widehat{\psi}^{\dagger b}(y)\} = i\delta_a^b\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ \{\widehat{\psi}_a(x), \widehat{\psi}_b(y)\} &= \{\widehat{\psi}^{\dagger a}(x), \widehat{\psi}^{\dagger b}(y)\} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-11}$$

を課すことにより達成される．但し，$\{A, B\} \equiv AB + BA$ であり，添字の a, b はスピノール 4 成分を明示している．また，同時刻ということから，$x = (t, \boldsymbol{x})$, $y = (t, \boldsymbol{y})$ である．

ここで式 (8−1) から導かれる Dirac 方程式

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0 \tag{8-12}$$

の解の完全系を導入する．平面波解として $\psi(x) = u(p)e^{-ipx}$ を代入してみると，

$$(\not{p} - m)u(p) = 0$$

が得られる．これが意味のある解を持つのは，係数行列式 $\det(\not{p} - m)$ が 0 の場合であり，これから

$$p^0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} \tag{8-13}$$

が導かれる．p^0 はエネルギーであるから，Dirac 方程式の解には正エネルギー解と負エネルギー解があることになる．以後，$p^0 \equiv \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ とし，負エネルギーの場合は $-p^0$ と記すことにする．このとき正エネルギー解 $u(\boldsymbol{p}, s)$ は

$$(\not{p} - m)u(\boldsymbol{p}, s) = 0 \tag{8-14}$$

を満たし，負エネルギー解 $v(\boldsymbol{p}, s)$ は

$$(\not{p} + m)v(\boldsymbol{p}, s) = 0 \tag{8-15}$$

を満たす．但し，s はスピン自由度（ヘリシティの固有値）を示している．また，v と u は次の荷電共役変換（粒子と反粒子の変換）で結ばれているとする．

$$v(\boldsymbol{p}, s) = i\gamma^2 u^*(\boldsymbol{p}, s) \tag{8-16}$$

式 (8−14), (8−15) から直ちに

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}(\boldsymbol{p}, s)(\not{p} - m) &= 0 \\ \overline{v}(\boldsymbol{p}, s)(\not{p} + m) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8-17}$$

が得られる．次に，共変的規格化条件

$$\overline{u}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s') = 2m\delta_{ss'} \tag{8-18}$$

を採用すると，

$$\overline{v}(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s') = -2m\delta_{ss'} \tag{8-19}$$

が導かれ，また

$$\left.\begin{aligned}\overline{u}(\boldsymbol{p},s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p},s') = 2p^\mu\delta_{ss'}\\ \overline{v}(\boldsymbol{p},s)\gamma^\mu v(\boldsymbol{p},s') = 2p^\mu\delta_{ss'}\end{aligned}\right\} \tag{8-20}$$

が得られる．同様にして直交性

$$\left.\begin{aligned}\overline{v}(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s') = v^\dagger(\boldsymbol{p},s)u(-\boldsymbol{p},-s') = 0\\ \overline{u}(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s') = -u^\dagger(\boldsymbol{p},s)v(-\boldsymbol{p},-s') = 0\end{aligned}\right\} \tag{8-21}$$

も示せる．$\gamma^0 u(\boldsymbol{p},s) = u(-\boldsymbol{p},-s)$, $\gamma^0 v(\boldsymbol{p},s) = -v(-\boldsymbol{p},-s)$ となっていることに注意．更に，完全性の関係式

$$\left.\begin{aligned}\sum_s u(\boldsymbol{p},s)\overline{u}(\boldsymbol{p},s) = \not{p} + m\\ \sum_s v(\boldsymbol{p},s)\overline{v}(\boldsymbol{p},s) = \not{p} - m\end{aligned}\right\} \tag{8-22}$$

も射影演算子の議論から導ける．

以上で Dirac 方程式の解の完全系 $u(\boldsymbol{p},s)$, $v(\boldsymbol{p},s)$ が導入できたので，これを用いて量子化された Dirac 場 $\widehat{\psi}(x)$ を展開する．

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{\sqrt{(2\pi)^3 2p^0}} \left\{b(\boldsymbol{p},s)u(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx} + d^\dagger(\boldsymbol{p},s)v(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}\right\} \tag{8-23}$$

ここで，係数演算子 $b(\boldsymbol{p},s)$ は電子の消滅演算子，$d^\dagger(\boldsymbol{p},s)$ は陽電子（電子の反粒子）の生成演算子である．また，式 (8-11) から

$$\begin{gathered}\{b(\boldsymbol{p},s), b^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = \{d(\boldsymbol{p},s), d^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\} = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\\ \text{他は全て反可換}\end{gathered} \tag{8-24}$$

となることが示せる．これらのことに注意して Hamiltonian $\widehat{H}$ と 2 点 Green 関数 $\langle 0 \mid T\widehat{\psi}(x)\widehat{\overline{\psi}}(y) \mid 0\rangle$ を求めてみる．まず古典場の Hamiltonian H は

$$H = \int d^3x \{\pi_\psi(x)\dot{\psi}(x) - \mathcal{L}[x]\}$$

$$= \int d^3x \{ i\psi^\dagger \partial_0 \psi - \overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi + m\overline{\psi}\psi \}$$

$$= \int d^3x \{ -i\overline{\psi}\gamma^k \partial_k \psi + m\overline{\psi}\psi \}$$

$$= \int d^3x \psi^\dagger \{ \gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) + m\gamma^0 \} \psi$$

であるから，量子化された後では

$$\widehat{H} = \int d^3x \widehat{\psi}^\dagger \{ \gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) + m\gamma^0 \} \widehat{\psi} \tag{8-25}$$

となる．これに式 (8-23) を代入すると

$$\begin{aligned}
\widehat{H} = \sum_{s,s'} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{\sqrt{2p_0 2p'_0}} & \\
\cdot \Big\{ b^\dagger(\boldsymbol{p},s) u^\dagger(\boldsymbol{p},s) e^{ipx} &+ d(\boldsymbol{p},s) v^\dagger(\boldsymbol{p},s) e^{-ipx} \Big\} \\
\times (\gamma^0\gamma^k(-i\partial_k) &+ m\gamma^0) \\
\cdot \Big\{ b(\boldsymbol{p}',s') u(\boldsymbol{p}',s') e^{-ip'x} &+ d^\dagger(\boldsymbol{p}',s') v(\boldsymbol{p}',s') e^{ip'x} \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3p d^3p'}{\sqrt{2p_0 2p'_0}} \Big\{ & b^\dagger(\boldsymbol{p},s) b(\boldsymbol{p}',s') u^\dagger(\boldsymbol{p},s) (\gamma^0\gamma^k(-p'_k) + m\gamma^0) \\
& \times u(\boldsymbol{p}',s') e^{i(p_0-p'_0)x^0} \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \\
& + d(\boldsymbol{p},s) d^\dagger(\boldsymbol{p}',s') v^\dagger(\boldsymbol{p},s) (\gamma^0\gamma^k p'_k + m\gamma^0) \\
& \times v(\boldsymbol{p}',s') e^{-i(p_0-p'_0)x^0} \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sum_{s,s'} \int \frac{d^3p}{2p_0} \Big\{ & b^\dagger(\boldsymbol{p},s) b(\boldsymbol{p},s') \overline{u}(\boldsymbol{p},s) (-\gamma^k p_k + m) u(\boldsymbol{p},s') \\
& + d(\boldsymbol{p},s) d^\dagger(\boldsymbol{p},s') \overline{v}(\boldsymbol{p},s) (\gamma^k p_k + m) v(\boldsymbol{p},s') \Big\}
\end{aligned}$$

が得られる．更に，式 (8-18)〜(8-20) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\widehat{H} = \sum_{s,s'} \int \frac{d^3p}{2p_0} \Big\{ & b^\dagger(\boldsymbol{p},s) b(\boldsymbol{p},s') \left(-p_k 2p^k \delta_{ss'} + m2m\delta_{ss'} \right) \\
& + d(\boldsymbol{p},s) d^\dagger(\boldsymbol{p},s') \left(p_k 2p^k \delta_{ss'} + m(-2m\delta_{ss'}) \right) \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \sum_{s} \int \frac{d^3p}{2p_0} \Big\{ & b^\dagger(\boldsymbol{p},s) b(\boldsymbol{p},s) (-2p_k p^k + 2m^2) \\
& + d(\boldsymbol{p},s) d^\dagger(\boldsymbol{p},s) (2p_k p^k - 2m^2) \Big\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{s} \int \frac{d^3p}{2p_0} \Big\{ 2b^\dagger(\boldsymbol{p},s) b(\boldsymbol{p},s) (\boldsymbol{p}^2 + m^2)$$

$$-2d(\boldsymbol{p},s)d^\dagger(\boldsymbol{p},s)(\boldsymbol{p}^2+m^2)\Big\}$$

$$=\sum_s\int d^3p\,p_0\Big\{b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)-d(\boldsymbol{p},s)d^\dagger(\boldsymbol{p},s)\Big\}$$

となる．ここで被積分関数の第 2 項において，式 (8-24) を用いると

$$\widehat{H}=\sum_s\int d^3p\,p_0\left\{b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)d(\boldsymbol{p},s)-\delta^3(\boldsymbol{p}=0)\right\}$$

$$=\sum_s\int d^3p\left\{p_0\left(b^\dagger(\boldsymbol{p},s)b(\boldsymbol{p},s)+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)d(\boldsymbol{p},s)\right)-\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}p_0\right\} \tag{8-26}$$

が得られる．以上の計算で $b^\dagger\cdot d^\dagger$ や $d\cdot b$ の項が消えているが，これは式 (8-17) と u,v の直交性の式 (8-21) から示される．式 (8-26) が，生成・消滅演算子で書かれた量子化された Hamiltonian である．最後の発散項は零点震動のエネルギーである．これは場の理論が無限自由度を有していることに起因している．空間積分による発散も含まれているが，領域を限定すればこれは考えないですむ．いずれにせよ今後はエネルギーの原点をずらして零点エネルギー項は無視することにする．

次に，2 点 Green 関数であるが，まずスピノール成分間のものを計算する．フェルミオン場の T 積の定義から

$$\left\langle 0\left|T\widehat{\psi}_a(x)\widehat{\overline{\psi}}{}^b(y)\right|0\right\rangle=\theta(x^0-y^0)\left\langle 0\left|\widehat{\psi}_a(x)\widehat{\overline{\psi}}{}^b(y)\right|0\right\rangle$$

$$-\theta(y^0-x^0)\left\langle 0\left|\widehat{\overline{\psi}}{}^b(y)\widehat{\psi}_a(x)\right|0\right\rangle \tag{8-27}$$

となる．但し，

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ \dfrac{1}{2} & (t=0)\\ 0 & (t<0)\end{cases} \tag{8-28}$$

である．ここで，簡単のため $x^0>y^0$ を仮定する．そうすると，式 (8-23) を代入して

$$\left\langle 0\left|T\widehat{\psi}_a(x)\widehat{\overline{\psi}}{}^b(y)\right|0\right\rangle$$

$$=\left\langle 0\left|\widehat{\psi}_a(x)\widehat{\overline{\psi}}{}^b(y)\right|0\right\rangle$$

$$=\sum_{s,s'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2p_02p'_0}}\left\langle 0\left|\left\{b(\boldsymbol{p},s)u_a(\boldsymbol{p},s)e^{-ipx}+d^\dagger(\boldsymbol{p},s)v_a(\boldsymbol{p},s)e^{ipx}\right\}\right.\right.$$

$$\cdot\left\{b^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\overline{u}^b(\boldsymbol{p}',s')e^{ip'y}+d(\boldsymbol{p}',s')\overline{v}^b(\boldsymbol{p}',s')e^{-ip'y}\right\}\Big|0\Big\rangle$$

が得られるが，真空状態 $|0\rangle$ の定義

$$d(\boldsymbol{p},s)\mid 0\rangle=0,\quad b(\boldsymbol{p},s)\mid 0\rangle=0 \tag{8-29}$$

に注意すると

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0\left|T\widehat{\psi}_a(x)\widehat{\overline{\psi}}^b(y)\right|0\right\rangle\\
&=\sum_{s,s'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2p_02p_0'}}u_a(\boldsymbol{p},s)\overline{u}^b(\boldsymbol{p}',s')\\
&\qquad\times\langle 0\mid b(\boldsymbol{p},s)b^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\mid 0\rangle e^{-ipx+ip'y}\\
&=\sum_{s,s'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2p_02p_0'}}u_a(\boldsymbol{p},s)\overline{u}^b(\boldsymbol{p}',s')\\
&\qquad\times\langle 0\mid \{b(\boldsymbol{p},s),b^\dagger(\boldsymbol{p}',s')\}\mid 0\rangle e^{-ipx+ip'y}\\
&=\sum_{s,s'}\int\frac{d^3pd^3p'}{(2\pi)^3\sqrt{2p_02p_0'}}u_a(\boldsymbol{p},s)\overline{u}^b(\boldsymbol{p}',s')\delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')e^{-ipx+ip'y}\\
&=\sum_{s}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^32p_0}u_a(\boldsymbol{p},s)\overline{u}^b(\boldsymbol{p},s)e^{-ip(x-y)}
\end{aligned}$$

となる．結局，スピノール成分の添字をはずして式 (8-22) を用いると，

$$\begin{aligned}
&\left\langle 0\left|T\widehat{\psi}(x)\widehat{\overline{\psi}}(y)\right|0\right\rangle\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^32p_0}\sum_s u(\boldsymbol{p},s)\overline{u}(\boldsymbol{p},s)e^{-ip(x-y)}\\
&=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^32p_0}(\not{p}+m)e^{-ip(x-y)}\\
&=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^32p_0}e^{-ip(x-y)}\\
&=(i\gamma^\mu\partial_\mu+m)\int\frac{id^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2-m^2}\\
&=\int\frac{id^4p}{(2\pi)^4}\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}e^{-ip(x-y)}\\
&=\int\frac{id^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{-ip(x-y)}}{\not{p}-m}
\end{aligned} \tag{8-30}$$

となる．これはまさしく 7 章の式 (7-91) そのものである．よって，

$$\left\langle 0 \middle| T\widehat{\psi}(x)\widehat{\overline{\psi}}(y) \middle| 0 \right\rangle = S_F(x-y) \tag{8-31}$$

が得られる．式 (8-30) を導く過程で，$\int d^3p$ から $\int d^4p$ の形に変形した部分があるが，これは p^0 の複素積分を実行してみれば明らかである．

8-3 自由電磁場の正準量子化

電磁場は，Dirac 場のように Clifford 代数や Grassmann 数の演算を考慮しなくてよい反面，ゲージ場であることから拘束系の量子化を考えねばならないという点に注意する必要がある[1]．

さて，電磁場のみの Lagrangian 密度は式 (8-9) より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x] &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\\ &= -\frac{1}{4}\left\{\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)\right\}\left\{\partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)\right\}\end{aligned} \tag{8-32}$$

であるから，A_μ に正準共役な運動量 π^μ は

$$\pi^0(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_0 A_0(x)} = 0 \tag{8-33}$$

$$\pi^k(x) \equiv \frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_0 A_k(x)} = -(\partial^0 A^k - \partial^k A^0) = -F^{0k}(x) \tag{8-34}$$

となる．式 (8-33) はゲージ場の性質から生じたもので，第 1 次拘束条件である．これらを用いて古典場の Hamiltonian H は，

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x \left\{\pi^k(x)\dot{A}_k(x) - \mathcal{L}[x]\right\}\\ &= \int d^3x \left\{\pi^k\partial_0 A_k + \frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} + \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell}\right\}\\ &= \int d^3x \left\{\pi^k(-\pi_k + \partial_k A_0) + \frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell}\right\}\\ &= \int d^3x \left\{-\frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}(\partial_k A_\ell - \partial_\ell A_k)(\partial^k A^\ell - \partial^\ell A^k)\right\}\end{aligned} \tag{8-35}$$

と書ける．しかし，今考えている系は拘束系なので，未定乗数項 $\lambda(x)\pi^0(x)$ を含めた Hamiltonian $\widetilde{H}$ を用いる必要がある．

---

1) 厳密には，Dirac 場も Lagrangian の形から拘束系であるので，相応の量子化を行なわねばならないが，前節では簡単な方法で量子化を実行した．しかし，結果は同じである．

$$\widetilde{H} \equiv H + \int d^3x \lambda(x) \pi^0(x) \tag{8-36}$$

正準変数間の Poisson 括弧は，

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\}_P &= \delta^\nu_\mu \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ \{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_P &= \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\}_P = 0 \end{aligned} \tag{8-37}$$

であるから，これより $\pi^0(x)$ の時間微分は，6 章の式 (6-46) から

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^0(x) &\approx \{\pi^0(x), \widetilde{H}\}_P = \left\{\pi^0(x), H + \int d^3y \lambda(y)\pi^0(y)\right\}_P \\ &= \left\{\pi^0(x), \int d^3y \left(-\frac{1}{2}\pi_k(y)\pi^k(y) - A_0(y)\partial_{y^k}\pi^k(y) + \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell}\right)\right\}_P \\ &= -\int d^3y \{\pi^0(x), A_0(y)\}_P \partial_{y^k}\pi^k(y) \\ &= \int d^3y \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\partial_{y^k}\pi^k(y) \\ &= \partial_k \pi^k(x) \end{aligned} \tag{8-38}$$

となる．整合性の条件から $\pi^0(x)$ の時間微分は 0 となっていなければならない．こうして，二つの拘束条件が導かれる．

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &\equiv \pi^0(x) \approx 0 \qquad \text{(第1次拘束条件)} \\ \phi_2(x) &\equiv \partial_k \pi^k(x) \approx 0 \quad \text{(第2次拘束条件)} \end{aligned} \tag{8-39}$$

ここで，$\approx$ は拘束系の章で説明した弱等号を意味し，実際の計算においては，Poisson 括弧を求めた後で $=$ とすればよい．また，更なる拘束条件が現われないことは式 (8-38) と同様の計算を実行してみればわかる．ϕ_1, ϕ_2 はゲージ自由度から生じたものであり，第1類の拘束条件量である．従って，きちんと量子化を行なうためには，式 (8-39) に対応したゲージ固定条件

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &\equiv A_0(x) \approx 0 \\ \chi_2(x) &\equiv \partial^k A_k(x) \approx 0 \end{aligned} \tag{8-40}$$

を置いて第2類拘束系にした後，Dirac 括弧を交換子に置き換えるという手続きを踏まねばならない．しかしここでは簡単のために，弱等号を普通の等号にして，変数を減らした後，Poisson 括弧を経由した量子化の手続きをとることにする．こうしても物理的内容は変わらない．

　さて，まず条件式は

$$\left.\begin{array}{ll}\pi^0(x)=0, & \partial_k\pi^k(x)=0\\ A_0(x)=0, & \partial^k A_k(x)=0\end{array}\right\} \tag{8-41}$$

である．第2行の条件は Coulomb 条件と呼ばれている．式 (8-41) を満たす場は横波のみで，それを $\pi_T^k(x)$, $A_{Tk}(x)$ と記すことにすると H は

$$\begin{aligned}H &= \int d^3x\left\{-\frac{1}{2}\pi_{Tk}\pi_T^k+\frac{1}{4}(\partial_k A_{T\ell}-\partial_\ell A_{Tk})(\partial^k A_T^\ell-\partial^\ell A_T^k)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\left\{-\pi_{Tk}\pi_T^k+\partial_k A_{T\ell}\partial^k A_T^\ell-\partial_k A_{T\ell}\partial^\ell A_T^k\right\}\\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\left\{-\pi_{Tk}\pi_T^k+\partial_k A_{T\ell}\partial^k A_T^\ell\right\}+\frac{1}{2}\int d^3x A_{T\ell}\partial^\ell(\partial_k A_T^k)\\ &= \frac{1}{2}\int d^3x\left\{-\pi_{Tk}\pi_T^k+\partial_k A_{T\ell}\partial^k A_T^\ell\right\}\end{aligned} \tag{8-42}$$

となる．またこの横波成分の満たす Poisson 括弧は，式 (8-37) から縦波成分を消去して

$$\left\{A_{Tk}(x),\pi_T^\ell(y)\right\}_P=\left(\delta_k^\ell-\partial_k\partial^\ell/\partial_m\partial^m\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8-43}$$

となる．正準量子化は，$\{\cdot,\cdot\}_P$ を同時刻の交換子 $i^{-1}[\cdot,\cdot]$ で置き換えて

$$[\widehat{A}_{Tk}(x),\widehat{\pi}_T^\ell(y)]=i(\delta_k^\ell-\partial_k\partial^\ell/\partial_m\partial^m)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8-44}$$

を定義することにより達成される．上式右辺の演算子の意味は，

$$\begin{aligned}-\partial_k\partial^\ell/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= -\partial_k\partial^\ell/\partial_m\partial^m\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\, e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q\,\frac{q_k q^\ell}{\boldsymbol{q}^2}e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\end{aligned}$$

であると理解しておけばよい．

ここで，式 (8-32) に戻って，それから得られる電磁場の運動方程式を求めてみると

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x)=\Box A^\nu(x)-\partial^\nu\partial_\mu A^\mu(x)=0$$

となる．これに式 (8-41) の条件を課すと，

$$\Box A_T^k(x)-\partial^k\partial_\ell A_T^\ell(x)=\Box A_T^k(x)=0 \tag{8-45}$$

が得られる．これは，自由度 2, 質量 0 のボソン場の方程式である．試みに平面波解 $A_T^k(x)=a^k(q)e^{-iqx}$ を代入してみると

$$q^2\equiv q_\mu q^\mu=(q^0)^2-\boldsymbol{q}^2=0$$

が得られる．Dirac 場のときと同様に $q^0 \equiv |\boldsymbol{q}|$ とし，二つの偏極ベクトルを

$$\varepsilon^{(1)k}(\boldsymbol{q}) \equiv (1,0,0), \quad \varepsilon^{(2)k}(\boldsymbol{q}) \equiv (0,1,0) \tag{8-46}$$

$$\text{但し,} \quad q^k = (0,0,|\boldsymbol{q}|)$$

と選択すると，量子化された電磁場 $\widehat{A}_{Tk}(x)$ の完全系による展開の式

$$\widehat{A}_{Tk}(x) = \sum_{i=1}^{2}\int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2q_0}} \cdot \left\{a^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx} + a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{iqx}\right\} \tag{8-47}$$

が得られる．係数演算子 $a^{(i)}(\boldsymbol{q})$, $a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q})$ はそれぞれ光子の消滅，生成演算子である．式 (8-44) から

$$\begin{aligned} &[a^{(i)}(\boldsymbol{q}), a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}')] = \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \\ &[a^{(i)}(\boldsymbol{q}), a^{(j)}(\boldsymbol{q}')] = [a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q}), a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q})] = 0 \end{aligned} \tag{8-48}$$

となることが示せる．これは，式 (8-46) から得られる次の式

$$\sum_i \varepsilon^{(i)k}(\boldsymbol{q})\varepsilon^{(i)\ell}(\boldsymbol{q}) = -g^{k\ell} + \frac{q^k q^\ell}{(-\boldsymbol{q}^2)} \tag{8-49}$$

を用いれば示すことができる．

さて，式 (8-47) を，式 (8-42) を演算子形式に書き換えた式に代入して量子化された Hamiltonian $\widehat{H}$ を求めてみる．式 (8-34) に条件式 (8-41) を適用すると

$$\pi_T^k(x) = -\dot{A}_T^k(x) \tag{8-50}$$

となることに注意して，

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \frac{1}{2}\int d^3x \left\{-\widehat{\pi}_{Tk}\widehat{\pi}_T^k + \partial_k \widehat{A}_{T\ell}\partial^k \widehat{A}_T^\ell\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int \frac{d^3q d^3q'}{\sqrt{2q_0 2q_0'}} \left\{\left(iq_0 a^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx} - iq_0 a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{iqx}\right)\right. \\ &\quad \left. \cdot \left(-iq_0' a^{(j)}(\boldsymbol{q}')\varepsilon^{(j)k}(\boldsymbol{q}')e^{-iq'x} + iq_0' a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}')\varepsilon^{(j)k}(\boldsymbol{q}')e^{iq'x}\right)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int \frac{d^3q d^3q'}{\sqrt{2q_0 2q_0'}} \end{aligned}$$

$$\cdot\left\{\left(-iq_k a^{(i)}(q)\varepsilon_\ell^{(i)}(q)e^{-iqx} + iq_k a^{(i)\dagger}(q)\varepsilon_\ell^{(i)}(q)e^{iqx}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(-iq'^k a^{(j)}(q')\varepsilon^{(j)\ell}(q')e^{-iq'x} + iq'^k a^{(j)\dagger}(q')\varepsilon^{(j)\ell}(q')e^{iq'x}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \frac{d^3q d^3q'}{\sqrt{2q_0 2q_0'}}$$

$$\cdot\left\{-q_0 q_0' a^{(i)}(q)a^{(j)\dagger}(q')\varepsilon_k^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)k}(q')e^{-i(q-q')x}\right.$$

$$\left. - q_0 q_0' a^{(i)\dagger}(q)a^{(j)}(q')\varepsilon_k^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)k}(q')e^{i(q-q')x}\right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x \int \frac{d^3q d^3q'}{\sqrt{2q_0 2q_0'}}$$

$$\cdot\left\{q_k q'^k a^{(i)}(q)a^{(j)\dagger}(q')\varepsilon_\ell^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)\ell}(q')e^{-i(q-q')x}\right.$$

$$\left. + q_k q'^k a^{(i)\dagger}(q)a^{(j)}(q')\varepsilon_\ell^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)\ell}(q')e^{i(q-q')x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\int\frac{d^3q}{2q_0}\left\{-q_0^2\left(a^{(i)}(q)a^{(j)\dagger}(q) + a^{(i)\dagger}(q)a^{(j)}(q)\right)\varepsilon_k^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)k}(q)\right.$$

$$\left. + q_k q^k\left(a^{(i)}(q)a^{(j)\dagger}(q) + a^{(i)\dagger}(q)a^{(j)}(q)\right)\varepsilon_\ell^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)\ell}(q)\right\}$$

が得られる．途中 $a\cdot a$ や $a^\dagger\cdot a^\dagger$ の項が消えているが，これは $q_0^2 - q^2 = 0$ を用いて示される．式(8-46)から得られる式

$$\varepsilon_k^{(i)}(q)\varepsilon^{(j)k}(q) = -\delta_{ij} \tag{8-51}$$

を代入すると，

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_i\int\frac{d^3q}{2q_0}\left\{(q_0^2 - q_k q^k)\left(a^{(i)}(q)a^{(i)\dagger}(q) + a^{(i)\dagger}(q)a^{(i)}(q)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i\int\frac{d^3q}{2q_0}\left\{(q_0^2 + q^2)\left(2a^{(i)\dagger}(q)a^{(i)}(q) + \delta^3(q=0)\right)\right\}$$

$$= \sum_i\int d^3q\left\{q_0 a^{(i)\dagger}(q)a^{(i)}(q) + \frac{1}{2}\int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}q_0\right\}$$

$$= \int d^3q\left\{q_0\left(a^{(1)\dagger}(q)a^{(1)}(q) + a^{(2)\dagger}(q)a^{(2)}(q)\right) + \int\frac{d^3x}{(2\pi)^3}q_0\right\} \tag{8-52}$$

となる．式 (8−52) が，光子の生成・消滅演算子で書かれた量子化された Hamiltonian であり，最後の項は Dirac 場同様，零点震動のエネルギーである．

次に，横波電磁場の 2 点 Green 関数を計算する．ボソン場の T 積の定義から

$$\langle 0 \mid T\widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0\rangle$$
$$= \theta(x^0 - y^0)\langle 0 \mid \widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle 0 \mid \widehat{A}_{T\ell}(y)\widehat{A}_{Tk}(x) \mid 0\rangle \tag{8-53}$$

となるが，簡単のために $x^0 > y^0$ とする．式 (8−47) を代入すると

$$\langle 0 \mid T\widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0\rangle$$
$$= \langle 0 \mid \widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0\rangle$$
$$= \sum_{i,j}\int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^3\sqrt{2q_0 2q'_0}}\left\langle 0 \middle| \left\{a^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx} + a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{iqx}\right\}\right.$$
$$\left. \cdot \left\{a^{(j)}(\boldsymbol{q}')\varepsilon_\ell^{(j)}(\boldsymbol{q}')e^{-iq'y} + a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}')\varepsilon_\ell^{(j)}(\boldsymbol{q}')e^{iq'y}\right\} \middle| 0\right\rangle$$

が得られる．ここで，

$$a^{(i)}(\boldsymbol{q}) \mid 0\rangle = 0 \tag{8-54}$$

であるから，

$$\langle 0 \mid T\widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0\rangle$$
$$= \sum_{i,j}\int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^3\sqrt{2q_0 2q'_0}}\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_\ell^{(j)}(\boldsymbol{q}')\langle 0 \mid a^{(i)}(\boldsymbol{q})a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}') \mid 0\rangle e^{-iqx+iq'y}$$
$$= \sum_{i,j}\int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^3\sqrt{2q_0 2q'_0}}\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_\ell^{(j)}(\boldsymbol{q}')\langle 0 \mid [a^{(i)}(\boldsymbol{q}), a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}')] \mid 0\rangle e^{-iqx+iq'y}$$
$$= \sum_{i,j}\int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^3\sqrt{2q_0 2q'_0}}\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_\ell^{(j)}(\boldsymbol{q}')\delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}')e^{-iqx+iq'y}$$
$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0}\sum_i \varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_\ell^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{-iq(x-y)}$$

となる．更に式 (8−49) を代入すると，

$$\langle 0 \mid T\widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0\rangle$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} \left\{ -g_{k\ell} + \frac{q_k q_\ell}{(-\boldsymbol{q}^2)} \right\} e^{-iq(x-y)}$$

$$= \int \frac{id^4q}{(2\pi)^4} \frac{\{-g_{k\ell} + q_k q_\ell/(-\boldsymbol{q}^2)\}}{q^2} e^{-iq(x-y)} \tag{8-55}$$

が導かれる．これは Landau ゲージ（後で説明する）をとった場合の光子の Feynman 伝搬関数 $D_{Fk\ell}(x-y)$ である．すなわち，

$$\langle 0 \mid T\widehat{A}_{Tk}(x)\widehat{A}_{T\ell}(y) \mid 0 \rangle = D_{Fk\ell}(x-y) \tag{8-56}$$

となる．

8-4 経路積分による量子化

まず，自由電磁場の経路積分による量子化を考える．電磁場はゲージ場であることから第1類拘束系なので，

① ゲージ固定条件を置き，第2類拘束系にする．

② 第2類拘束系の量子化を行なう．

という2段階の手続きを踏む必要がある．

第1類の拘束条件は，前節で述べたように

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &\equiv \pi^0(x) \approx 0 \\ \phi_2(x) &\equiv \partial_k \pi^k(x) \approx 0 \end{aligned} \tag{8-39}$$

である．また，これらに対応したゲージ固定条件は

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &\equiv A_0(x) \approx 0 \\ \chi_2(x) &\equiv \partial^k A_k(x) \approx 0 \end{aligned} \tag{8-40}$$

であった．ゲージ固定に要求される条件は，「それを置くことにより Hamiltonian に現われる未定乗数が決定できる」ということである．式 (8-40) がこの条件を満たしていることを示す．各種の Poisson 括弧を計算してみると，式 (8-37) より

$$\begin{aligned} \{\chi_1(x), \phi_1(y)\}_P &= \{A_0(x), \pi^0(y)\}_P = \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ \{\chi_1(x), \phi_2(y)\}_P &= \{A_0(x), \partial_{y^k}\pi^k(y)\}_P = 0 \\ \{\chi_2(x), \phi_1(y)\}_P &= \{\partial^k A_k(x), \pi^0(y)\}_P = 0 \\ \{\chi_2(x), \phi_2(y)\}_P &= \{\partial^k A_k(x), \partial_{y^\ell}\pi^\ell(y)\}_P = \partial^k \partial_{y^\ell}\{A_k(x), \pi^\ell(y)\}_P \\ &= \partial^k \partial_{y^\ell}\left(\delta^\ell_k \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) = \nabla^2 \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

となるから，まとめて記すと

$$(\{\chi_i(x), \phi_j(y)\}_P) = \begin{pmatrix} \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 \\ 0 & \nabla^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} \tag{8-57}$$

と書ける．従って，3次元関数空間上の汎関数行列式は，

$$\mathrm{Det}\,(\{\chi, \phi\}_P) \neq 0 \tag{8-58}$$

となる．このとき，Hamiltonian に現われる未定乗数 $\lambda^i(x)$ は次のようにして決定される．

$$H_G = H + \int d^3y \lambda^j(y)\phi_j(y) \tag{8-59}$$

より，ゲージ固定条件は任意の時刻で成立することから

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_\ell(z) &\approx \{\chi_\ell(z), H_G\}_P \\ &\approx \{\chi_\ell(z), H\}_P + \int d^3y \{\chi_\ell(z), \phi_j(y)\}_P \lambda^j(y) \approx 0 \end{aligned} \tag{8-60}$$

となる．ここで

$$\{\chi_\ell(z), \phi_j(y)\}_P \equiv C_{\ell j}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})$$

とおくと，式(8-58)より $\mathrm{Det}\, C \neq 0$ であるから，結局

$$\lambda^i(x) = -\int d^3z C^{-1 i\ell}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\{\chi_\ell(z), H\}_P \tag{8-61}$$

が得られる．但し，C^{-1} は

$$\int d^3z C^{-1 i\ell}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})C_{\ell j}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}) = \delta^i_j \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8-62}$$

を満たす C の逆行列である．

こうして，ゲージ固定条件の式(8-40)を設定したことにより，この系は第2類拘束系となった．これの量子化はすでに拘束系のところで説明してあるので，それを場の理論に拡張すると，時間発展 Green 関数の経路積分表式

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I] \\ &\quad = \int \mathfrak{D}\pi \mathfrak{D}A \prod_x \{\delta(A_0(x))\delta(\partial^k A_k(x))\} \prod_x \{\delta(\pi^0(x))\delta(\partial_\ell \pi^\ell(x))\} \\ &\qquad \times \prod_t \mathrm{Det}\,(\{\chi, \phi\}_P) \exp i \int d^4x \left\{\pi^\mu(x)\dot{A}_\mu(x) - \mathcal{H}[x]\right\} \end{aligned} \tag{8-63}$$

が得られる[1]．7章7-3節で示したように，$\lim_{\substack{t_I\to-\infty\\ t_F\to\infty}}$ とするということは初期・終状態を真空状態にとることに相当するので，一般的状態のGreen関数の表式も全く同じになる．ここで，式(8−57)より，

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\,(\{\chi,\phi\}_P) &= \mathrm{Det}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\mathrm{Det}\left(\nabla^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)\\ &= \mathrm{Det}\left(\nabla^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)\end{aligned} \qquad (8-64)$$

となる．また，$\pi^0(x)$, $A_0(x)$ の積分は，$\delta(\pi^0)$, $\delta(A_0)$ により自明である（単にその項を落とせばよい）から，実行してしまう．そうすると exp の肩の項は，式(8−35)を代入して

$$i\int d^4x\left\{\pi^\mu(x)\dot{A}_\mu(x)-\mathcal{H}[x]\right\}=i\int d^4x\left\{\pi^k\dot{A}_k+\frac{1}{2}\pi_k\pi^k-\frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell}\right\}$$

となる．よって，式(8−63)は，次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{t_I\to-\infty\\ t_F\to\infty}} G[A_F,A_I;t_F-t_I]\\ &\quad=\int\mathfrak{D}\pi^k\mathfrak{D}A_k\prod_x\delta(\partial^kA_k(x))\prod_x\delta(\partial_\ell\pi^\ell(x))\prod_t\mathrm{Det}\left(\nabla^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)\\ &\qquad\times\exp i\int d^4x\left\{\pi^k(x)\dot{A}_k(x)+\frac{1}{2}\pi_k(x)\pi^k(x)-\frac{1}{4}F_{k\ell}(x)F^{k\ell}(x)\right\}\end{aligned} \qquad (8-65)$$

そこで，例えば $\mathfrak{D}A_k$ は，A_μ の空間成分のみから構成される経路積分測度を示している．更に，補助場 $\varphi(x)$ を導入して，

$$\prod_x\delta\left(\delta_\ell\pi^\ell(x)\right)=\int\mathfrak{D}\varphi\exp i\int d^4x\varphi(x)\partial_\ell\pi^\ell(x) \qquad (8-66)$$

と書けることを利用すると，結局

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{t_I\to-\infty\\ t_F\to\infty}} G[A_F,A_I;t_F-t_I]\\ &\quad=\int\mathfrak{D}\pi^k\mathfrak{D}A_k\mathfrak{D}\varphi\prod_x\delta\left(\partial^kA_k(x)\right)\prod_t\mathrm{Det}\left(\nabla^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right)\\ &\qquad\times\exp i\int d^4x\left\{\pi^k\dot{A}_k+\frac{1}{2}\pi_k\pi^k-\frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell}+\varphi\partial_\ell\pi^\ell\right\}\end{aligned} \qquad (8-67)$$

が得られる．

1) 式(5−220)のFaddeevの行列式 $\det(\{\chi,\chi^t\}_P)$ を今の場合に適用すると，$(\mathrm{Det}(\{\chi,\phi\}_P))^2$ となる．

次に，$\pi^k(x)$ の積分を実行する．まず，

$$\frac{1}{2}\pi_k\pi^k + \pi^k\dot{A}_k = \frac{1}{2}(\pi_k + \partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\pi^k + \partial^0 A^k - \partial^k\varphi) - \frac{1}{2}(\partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\partial^0 A^k - \partial^k\varphi) + \pi^k\partial_k\varphi$$

を利用すると，exp の肩の項は

$$\begin{aligned} & i\int d^4x\left\{\pi^k\dot{A}_k + \frac{1}{2}\pi_k\pi^k - \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell} + \varphi\partial_\ell\pi^\ell\right\} \\ & = i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}(\pi_k + \partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\pi^k + \partial^0 A^k - \partial^k\varphi)\right. \\ & \qquad \left. - \frac{1}{2}(\partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\partial^0 A^k - \partial^k\varphi) + \pi^k\partial_k\varphi - \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell} + \varphi\partial_\ell\pi^\ell\right\} \end{aligned}$$

と書き換えられる．ここで，

$$\int d^4x(\pi^k\partial_k\varphi + \varphi\partial_\ell\pi^\ell) = \int d^4x\partial_k(\pi^k\varphi) = 0$$

となること，及び補助場 φ を電磁場 A_μ の時間成分と考え直すと，

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}(\partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\partial^0 A^k - \partial^k\varphi) - \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell} \\ & = -\frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} - \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell} \\ & = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

と書けることに注意して，

$$\begin{aligned} & i\int d^4x\left\{\pi^k\dot{A}_k + \frac{1}{2}\pi_k\pi^k - \frac{1}{4}F_{k\ell}F^{k\ell} + \varphi\partial_\ell\pi^\ell\right\} \\ & = i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}(\pi_k + \partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\pi^k + \partial^0 A^k - \partial^k\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\} \end{aligned}$$

が得られる．従って，式 (8−67) は

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{t_I\to-\infty \\ t_F\to\infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I] \\ & = \int \mathfrak{D}A\mathfrak{D}\pi^k \prod_{x}\delta\left(\partial^k A_k(x)\right)\prod_{t}\mathrm{Det}\left(\nabla^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \\ & \quad \times \exp i\int d^4x\left\{\frac{1}{2}(\pi_k + \partial_0 A_k - \partial_k\varphi)(\pi^k + \partial^0 A^k - \partial^k\varphi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right\} \end{aligned}$$

となる．更に，変数変換

$$\pi^k(x) \longrightarrow \pi'^k(x) = \pi^k(x) + \partial^0 A^k(x) - \partial^k \varphi(x)$$

を行なっても経路積分測度は不変であることから，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I] \\
&\quad = \int \mathfrak{D}A\mathfrak{D}\pi'^k \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}' \cdot \boldsymbol{\pi}' \right\} \\
&\qquad \times \prod_x \delta\left(\partial^k A_k(x)\right) \prod_t \mathrm{Det}\left(\nabla^2 \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\} \\
&\quad = \int \mathfrak{D}A \prod_x \delta\left(\partial^k A_k(x)\right) \prod_t \mathrm{Det}\left(\nabla^2 \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\}
\end{aligned}$$

が導かれる．ここで，$\mathrm{Det}(\cdot)$ は 3 次元関数空間上の汎関数行列式であるが，次のようにして 4 次元関数空間上の行列式に直すことができる．

$$\begin{aligned}
\prod_t \mathrm{Det}\left(\nabla^2 \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) &= \mathrm{Det}\left(\prod_t \nabla^2 \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \\
&= \mathrm{Det}\left(\delta(x^0 - y^0)\nabla^2 \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right) \\
&= \mathrm{Det}\left(\nabla^2 \delta^4(x-y)\right)
\end{aligned}$$

これを上の式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I] \\
&\quad = \int \mathfrak{D}A \prod_x \delta\left(\partial^k A_k(x)\right) \mathrm{Det}\left(\nabla^2 \delta^4(x-y)\right) \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right\}
\end{aligned} \tag{8-68}$$

となる．これから横波のみの経路積分表式が得られるが，後々の計算では Lorentz 共変な表式を用いるので，そちらを求めておく．

まず，式 (8-68) の作用積分は，その形から明らかなようにゲージ変換不変であることを注意しておく．

さて，電磁場のゲージ変換

$$A_{T\mu}(x) \longrightarrow A^\theta_\mu(x) = A_{T\mu}(x) - \partial_\mu \theta(x)$$

を用いて，横波から一般のゲージへの変数変換を実行したとする．この A^θ_μ が式 (8-68)

の A_μ であると考えることができる．このとき，$\partial^k A_{Tk}=0$ であるから，

$$\partial^k A_k^\theta(x) = -\partial^k\partial_k\theta(x) = \nabla^2\theta(x) \tag{8-69}$$

が成立し，これより式 (8－68) の δ 関数の項と Det の項を含む経路積分測度 $\mathfrak{D}\mu$ は，

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\mu &\equiv \mathfrak{D}A\prod_x \delta(\partial^k A_k)\mathrm{Det}\left(\nabla^2\delta^4(x-y)\right)\\ &= \mathfrak{D}A^\theta\prod_x \delta(\partial^k A_k^\theta)\mathrm{Det}\left(\nabla^2\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)}\right)\\ &= \mathfrak{D}A^\theta\prod_x \delta(\partial^k A_k^\theta)\mathrm{Det}\left(\frac{\delta\partial^k A_k^\theta(x)}{\delta\theta(y)}\right)\end{aligned} \tag{8-70}$$

となる．従って，これに更に $\mathfrak{D}\theta$ をかけてみると，

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\mu\mathfrak{D}\theta &= \mathfrak{D}A^\theta\mathfrak{D}\theta\mathrm{Det}\left(\frac{\delta\partial^k A_k^\theta(x)}{\delta\theta(y)}\right)\prod_x\delta(\partial^k A_k^\theta)\\ &= \mathfrak{D}A^\theta\mathfrak{D}(\partial^k A_k^\theta)\prod_x\delta(\partial^k A_k^\theta)\end{aligned} \tag{8-71}$$

が導かれる．ここで，$g(x)\equiv\partial^k A_k^\theta(x)$ とおくと，最右辺の項には $\prod_x(dg\cdot\delta(g))$ という部分が含まれているが，これは δ 関数の性質から積分には 1 の寄与しかしないことがわかる．つまり，この形を保持しさえすれば $g(x)$ としては何を選択しても同じなのである．そこでこれまで用いてきたゲージ条件 $\partial^k A_k(x)\approx 0$ の代わりに，Lorentz 共変なゲージ条件

$$\partial^\mu A_\mu(x) - f(x) \approx 0 \tag{8-72}$$

を採用することが許される．$f(x)$ は任意の関数である．このとき，$g(x)\equiv\partial^\mu A_\mu^\theta(x) - f(x)$ であるから，これを用いると

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\mu\mathfrak{D}\theta &= \mathfrak{D}A^\theta\mathfrak{D}(\partial^\mu A_\mu^\theta - f)\prod_x\delta(\partial^\mu A_\mu^\theta - f)\\ &= \mathfrak{D}A^\theta\mathfrak{D}\theta\mathrm{Det}\left(\frac{\delta(\partial^\mu A_\mu^\theta - f)}{\delta\theta}\right)\prod_x\delta(\partial^\mu A_\mu^\theta - f)\\ &= \mathfrak{D}A^\theta\mathfrak{D}\theta\mathrm{Det}\left(\Box\delta^4(x-y)\right)\prod_x\delta(\partial^\mu A_\mu^\theta - f)\end{aligned} \tag{8-73}$$

が得られる．これより経路積分測度 $\mathfrak{D}\mu$ は，

$$\mathfrak{D}\mu = \mathfrak{D}A\prod_x\delta(\partial^\mu A_\mu - f)\mathrm{Det}\left(\Box\delta^4(x-y)\right) \tag{8-74}$$

となる．従って，式 (8-68) は

$$\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I]$$
$$= \int \mathfrak{D}A \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f) \mathrm{Det}\left(\Box \delta^4(x-y)\right) \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\} \tag{8-75}$$

と書き換えられる．ここで，補助場 $B(x)$ を導入して，式 (8-66) と同様の関係式

$$\prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu - f) = \int \mathfrak{D}B \exp i \int d^4x B(x) \left(\partial^\mu A_\mu(x) - f(x)\right)$$

を用いると，結局 Lorentz 共変な表式

$$\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I] = \int \mathfrak{D}A \mathfrak{D}B \mathrm{Det}\left(\Box \delta^4(x-y)\right)$$
$$\times \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + B(\partial^\mu A_\mu - f) \right\} \tag{8-76}$$

に到達する．

次に，この式に含まれている任意関数 f を消去するために関係式

$$\int \mathfrak{D}f \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\xi} f^2(x) \right\} \equiv a \quad : \text{ const.} \tag{8-77}$$

を挿入する．そうすると，

$$\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I]$$
$$= a^{-1} \int \mathfrak{D}A \mathfrak{D}B \mathfrak{D}f \mathrm{Det}\left(\Box \delta^4(x-y)\right)$$
$$\times \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + B(\partial^\mu A_\mu - f) - \frac{1}{2\xi} f^2 \right\}$$
$$= a^{-1} \int \mathfrak{D}A \mathfrak{D}B \mathfrak{D}f \mathrm{Det}\left(\Box \delta^4(x-y)\right)$$
$$\times \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \right\}$$
$$\times \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\xi} (f + \xi B)^2 \right\}$$
$$= a^{-1} \int \mathfrak{D}A \mathfrak{D}B \mathrm{Det}\left(\Box \delta^4(x-y)\right)$$

$$\times \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + B \partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \right\}$$

$$\times \int \mathfrak{D} f' \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2\xi} f'^2 \right\}$$

$$= \int \mathfrak{D} A \mathfrak{D} B \mathrm{Det} \left(\Box \delta^4(x-y) \right)$$

$$\times \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + B \partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \right\} \qquad (8-78)$$

となる．これは，B 場形式における Lorentz 共変な電磁場の経路積分表式であり，補助場 B のことを中西-Lautrap 場という．また，ξ は Feynman のゲージパラメータである．ここで，式 $(8-78)$ の Lagrangian 密度から導かれる場の方程式を求めてみると，A_ν による変分をとって，

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial^\nu B = 0 \qquad (8-79)$$

が得られ，B による変分をとると

$$\partial^\mu A_\mu + \xi B = 0 \qquad (8-80)$$

が得られる．試みに式 $(8-79)$ の両辺において ∂_ν をとってみると，$F^{\mu\nu}$ の反対称性から

$$\Box B = 0 \qquad (8-81)$$

という自由場の方程式が得られる．電磁場は可換ゲージ場（内部空間が $U(1)$-**C**-加群である）なので，補助場 B が自由場となるのである．非可換ゲージ場のときはこうはならない．

また，式 $(8-78)$ の行列式 $\mathrm{Det}(\Box \delta^4(x-y))$ もフェルミオン場の Gauss 積分公式

$$\mathrm{Det}\, M = \int \mathfrak{D} \bar{c} \mathfrak{D} c \exp i \int d^4x\, d^4y \left\{ -i \bar{c}(x) M(x,y) c(y) \right\} \qquad (8-82)$$

を用いて書き換えることができる．$M(x,y)$ として $\Box \delta^4(x-y)$ を代入してみると，

$$\mathrm{Det} \left(\Box \delta^4(x-y) \right) = \int \mathfrak{D} \bar{c} \mathfrak{D} c \exp i \int d^4x\, d^4y \left\{ -i \bar{c}(x) \Box \delta^4(x-y) c(y) \right\}$$

$$= \int \mathfrak{D} \bar{c} \mathfrak{D} c \exp i \int d^4x \left\{ -i \bar{c}(x) \Box \int d^4y \delta^4(x-y) c(y) \right\}$$

$$= \int \mathfrak{D} \bar{c} \mathfrak{D} c \exp i \int d^4x \left\{ -i \bar{c}(x) \Box c(x) \right\} \qquad (8-83)$$

となるから，これを式 (8-78) に代入すると，

$$\lim_{\substack{t_I\to-\infty\\ t_F\to\infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I] = \int \mathfrak{D}A\mathfrak{D}B\mathfrak{D}\bar{c}\mathfrak{D}c$$

$$\cdot \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2}B^2 - i\bar{c}\,\Box\, c \right\} \qquad (8-84)$$

が得られる．ここで導入した場 c, $\bar{c}$ は Faddeev-Popov ゴーストと呼ばれているが，その理由は，実フェルミオン場であるにもかかわらずボソン場の Lagrangian 密度を構成しているからである．特に，c をゴースト場，$\bar{c}$ を反ゴースト場という．非可換ゲージ場のときには，これらが観測にはかからないにもかかわらず重要な役割を演じる．しかし，電磁場の場合には単なる独立した場に過ぎず，観測にもかからない．実際 Lagrangian 密度をみてみると，ゴースト場は他の場から完全に分離されており，場の方程式も

$$\Box\, c = \Box\, \bar{c} = 0 \qquad (8-85)$$

となって，自由場の方程式を与えるだけである．従って，量子電磁力学を考えている限りは，この定数項を無視しても何ら差し支えがない．

式 (8-84) が経路積分表式による電磁場の量子化であり，exp の肩に現われている

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2}B^2 - i\bar{c}\,\Box\, c \qquad (8-86)$$

が，電磁場の量子論における全 Lagrangian 密度である．それには補助場 B の項（ゲージ固定項）と Faddeev-Popov ゴースト項が含まれている．そこで，Landau ゲージは $\xi = 0$ としたものであり，Feynman ゲージは $\xi = 1$ としたものである．これまでに述べてきた電磁場の経路積分表式は，他の様々なゲージ場の経路積分表式を導出する際にも若干の拡張を行なうだけでそのまま使うことができる．つまり，非常に汎用性のある手法であるということができる．

更に，式 (8-84) を B について積分してしまうこともできる．今後，量子電磁力学においては意味のない Faddeev-Popov 項は無視することにする．そうすると，

$$\lim_{\substack{t_I\to-\infty\\ t_F\to\infty}} G[A_F, A_I; t_F - t_I]$$

$$= \int \mathfrak{D}A\mathfrak{D}B \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\xi}{2}\left(B + \frac{1}{\xi}\partial^\mu A_\mu\right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \right\}$$

$$= \int \mathfrak{D}A\mathfrak{D}B \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \right\}$$

$$\times \exp i \int d^4x \frac{\xi}{2}\left(B + \frac{1}{\xi}\partial^\mu A_\mu \right)^2$$

$$= \int \mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \right\}$$

$$\times \int \mathfrak{D}B' \exp i \int d^4x \frac{\xi}{2}B'^2$$

$$= b \int \mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \right\} \tag{8-87}$$

が得られる．但し，定数 b は

$$b \equiv \int \mathfrak{D}B \exp i \int d^4x \frac{\xi}{2}B^2 \tag{8-88}$$

である．

以上で，電磁場のみの経路積分表式は全て導出したことになる．後は，これに Dirac 場の項と電磁相互作用の項をつけ加えれば量子電磁力学の経路積分表式が完成する．式 (8-87) の係数 b は，K 点 Green 関数や，その生成汎関数の表示では分母のそれと相殺して消えてしまうので，始めから無視することにする．7 章の式 (7-87) とこの章の式 (8-9) を思い起こしてみると，結局量子電磁力学の経路積分表式は，

$$\lim_{\substack{t_I \to -\infty \\ t_F \to \infty}} G[\psi_F, A_F; \psi_I, A_I; t_F - t_I]$$

$$= \int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \Big\{ \overline{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi$$

$$- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \Big\}$$

$$= \int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \right\} \tag{8-89}$$

となる．但し，$\mathcal{L}[x]$ は式 (8-9) そのもので，

$$\mathcal{L}[x] = \overline{\psi} i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{8-90}$$

である．これより，K 点 Green 関数の生成汎関数 Z は，外場 $J^\mu(x)$, $\eta(x)$, $\overline{\eta}(x)$ を用いて

$$Z[J,\eta,\overline{\eta}] = \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \left\{\mathcal{L}[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right\}}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \left\{\mathcal{L}[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right\}} \tag{8-91}$$

と表わせる．

演習問題

1. $\det(\not{p} - m) = 0$ から式 (8-13) を導け．

2. 式 (8-20), (8-21), (8-22) を導出せよ．

3. 式 (8-24) を導出せよ．

4. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int dp^0 \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = -\frac{i\pi}{p^0}e^{-ip(x-y)}$

を示せ．但し，右辺においては $p_0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ である．

5. 式 (8-39) の第 1 次，第 2 次の拘束条件で尽きていること，すなわち更なる拘束条件は現われないことを示せ．

6. $A_{Tk} = (\delta_k^\ell - \partial_k\partial^\ell/\partial_m\partial^m)A_\ell$, $\pi_T^\ell = (\delta_k^\ell - \partial_k\partial^\ell/\partial_m\partial^m)\pi^k$ として式 (8-43) を導け．

7. 式 (8-44) と式 (8-48) の無矛盾性を示せ．

8. 式 (8-66) が成り立つことを示せ．

第9章 電磁相互作用における摂動論

本章では，量子電磁力学の経路積分表式に7章で展開した摂動論を適用し，具体的な相互作用のK点Green関数を求め，Feynmanダイアグラムの描き方を説明する．

まずは自由場のみの生成汎関数を，Feynman伝搬関数を用いて書き換える．次に，電磁相互作用項を考慮し摂動論の基本式を導く．それを具体的な散乱過程に適用し，各々のGreen関数の表式を求めて，それからFeynmanダイアグラムを描く．最後に，量子電磁力学のFeynman則を導く．

ここでは，個々の散乱過程のGreen関数の導出の仕方，Feynmanダイアグラムの描き方を身につけて頂きたい．

9－1　自由場とFeynman伝搬関数

量子電磁力学の外場も含む全Lagrangian密度 $\mathcal{L}_t[x]$ は，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t[x] &= \mathcal{L}[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta \\ &= \mathcal{L}_0[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \mathcal{L}_{\rm int}[x] + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta \qquad (9-1)\end{aligned}$$

である．但し，

$$\mathcal{L}_0[x] \equiv \overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (9-2)$$

$$\mathcal{L}_{\rm int}[x] \equiv e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \qquad (9-3)$$

とした．$\mathcal{L}_{\rm int}[x]$ が電磁相互作用の項である．従って，自由場を考えるときはこれを0とすればよい．そのときの生成汎関数を $Z_0[J,\eta,\overline{\eta}]$ とすると，

$$\begin{aligned}Z_0[J,\eta,\overline{\eta}] &= \frac{1}{N_0}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \\ &\quad \cdot \exp i\int d^4x \left\{\mathcal{L}_0[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right\} \qquad (9-4)\end{aligned}$$

となる．但し，

$$N_0 \equiv \int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i \int d^4x \left\{ \mathcal{L}_0[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \right\} \tag{9-5}$$

である．ここで，

$$\left\{ g^{\mu\rho}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\partial^\mu\partial^\rho \right\} D_{F\mu\nu}(x-y) = i\delta^\rho_\nu \delta^4(x-y) \tag{9-6}$$

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S_F(x-y) = i\delta^4(x-y) \tag{9-7}$$

を満たす二つの Green 関数 $D_{F\mu\nu}$ と S_F を導入する．$D_{F\mu\nu}$ の具体形は

$$D_{F\mu\nu}(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2} e^{-ik(x-y)} \tag{9-8}$$

であり，S_F は 7 章の式 (7-91) で与えられる．そしてそれらを用いて場の変数を

$$\left.\begin{aligned} A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - i\int d^4y D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y) \\ \psi'(x) &= \psi(x) - i\int d^4y S_F(x-y)\eta(y) \\ \overline{\psi}'(x) &= \overline{\psi}(x) - i\int d^4y\, \overline{\eta}(y)S_F(y-x) \end{aligned}\right\} \tag{9-9}$$

と変数変換する．第 3 式では，$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$ の性質から $S_F^\dagger(x-y)\gamma^0 = -\gamma^0 S_F(y-x)$ となることを利用した．これらを用いると式 (9-4) は以下のように書き換えられる．まず電磁場の項のみを考えよう．式 (9-9) から，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + i\int d^4y \partial_\mu D_{F\nu\rho}(x-y)J^\rho(y) \\ &\qquad\qquad - i\int d^4y \partial_\nu D_{F\mu\rho}(x-y)J^\rho(y) \end{aligned}$$

となることに注意すると，$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$ として

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - (\partial_\mu A'_\nu)i\int d^4y \partial^\mu D_F{}^{\nu\rho}(x-y)J_\rho(y) \\ &\quad + (\partial_\mu A'_\nu)i\int d^4y \partial^\nu D_F{}^{\mu\rho}(x-y)J_\rho(y) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int d^4y d^4y' \partial_\mu D_{F\nu\rho}(x-y)\partial^\mu D_F{}^{\nu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y') \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\int d^4y d^4y' \partial_\mu D_{F\nu\rho}(x-y)\partial^\nu D_F{}^{\mu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y') \tag{9-10}$$

が得られ，同様にして

$$-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2 - \frac{1}{\xi}(\partial^\mu A'_\mu)i\int d^4y \partial^\nu D_{F\nu\rho}(x-y)J^\rho(y)$$
$$+\frac{1}{2\xi}\int d^4y d^4y' \partial^\mu D_{F\mu\rho}(x-y)\partial^\nu D_{F\nu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J^\sigma(y') \tag{9-11}$$

が得られる．これらより，式 (9-4) の exp の肩 (電磁場の項のみ) は，

$$\begin{aligned}
&i\int d^4x\left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu\right\}\\
&= i\int d^4x\Big\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2 + J^\mu A'_\mu\\
&\quad - (\partial_\mu A'_\nu)i\int d^4y \partial^\mu D_F{}^{\nu\rho}(x-y)J_\rho(y)\\
&\quad + (\partial_\mu A'_\nu)i\int d^4y \partial^\nu D_F{}^{\mu\rho}(x-y)J_\rho(y)\\
&\quad + \frac{1}{2}\int d^4y d^4y' \partial_\mu D_{F\nu\rho}(x-y)\partial^\mu D_F{}^{\nu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y')\\
&\quad - \frac{1}{2}\int d^4y d^4y' \partial_\mu D_{F\nu\rho}(x-y)\partial^\nu D_F{}^{\mu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y')\\
&\quad - \frac{1}{\xi}(\partial^\mu A'_\mu)i\int d^4y \partial^\nu D_{F\nu\rho}(x-y)J^\rho(y)\\
&\quad + \frac{1}{2\xi}\int d^4y d^4y' \partial^\mu D_{F\mu\rho}(x-y)\partial^\nu D_{F\nu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J^\sigma(y')\\
&\quad + J^\mu(x)i\int d^4y D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\Big\}\\
&= i\int d^4x\Big\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2 + J^\mu A'_\mu\\
&\quad + A'_\nu i\int d^4y \,\Box\, D_F{}^{\nu\rho}(x-y)J_\rho(y)\\
&\quad - A'_\nu i\int d^4y \partial_\mu\partial^\nu D_F{}^{\mu\rho}(x-y)J_\rho(y)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\xi}A'_\mu i\int d^4y\partial^\mu\partial^\nu D_{F\nu\rho}(x-y)J^\rho(y)$$

$$-\frac{1}{2}\int d^4yd^4y' D_{F\nu\rho}(x-y)\,\Box\, D_F{}^{\nu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y')$$

$$+\frac{1}{2}\int d^4yd^4y' D_{F\nu\rho}(x-y)\partial_\mu\partial^\nu D_F{}^{\mu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y')$$

$$-\frac{1}{2\xi}\int d^4yd^4y' D_{F\mu\rho}(x-y)\partial^\mu\partial_\nu D_F{}^{\nu\sigma}(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y')$$

$$+i\int d^4yJ^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\Bigg\}$$

$$=i\int d^4x\Bigg\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2+J^\mu A'_\mu$$

$$+A'^\nu\int d^4yi\Bigg(\Box\, D_{F\nu\rho}(x-y)-\partial^\mu\partial_\nu D_{F\mu\rho}(x-y)$$

$$+\frac{1}{\xi}\partial^\mu\partial_\nu D_{F\mu\rho}(x-y)\Bigg)J^\rho(y)$$

$$+\frac{i}{2}\int d^4yd^4y' D_{F\nu\rho}(x-y)i\Bigg(\Box\, D_F{}^{\nu\sigma}(x-y')$$

$$-\partial_\mu\partial^\nu D_F{}^{\mu\sigma}(x-y')+\frac{1}{\xi}\partial_\mu\partial^\nu D_F{}^{\mu\sigma}(x-y')\Bigg)J^\rho(y)J_\sigma(y')$$

$$+i\int d^4yJ^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\Bigg\}$$

$$=i\int d^4x\Bigg\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2+J^\mu A'_\mu$$

$$-A'^\nu\int d^4yg_{\nu\rho}\delta^4(x-y)J^\rho(y)$$

$$-\frac{i}{2}\int d^4yd^4y' D_{F\nu\rho}(x-y)g^{\nu\sigma}\delta^4(x-y')J^\rho(y)J_\sigma(y')$$

$$+i\int d^4yJ^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\Bigg\}$$

$$=i\int d^4x\Bigg\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2+J^\mu A'_\mu-A'^\nu J_\nu$$

$$-\frac{i}{2}\int d^4y J^\nu(x) D_{F\nu\rho}(x-y) J^\rho(y)$$

$$+i\int d^4y J^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)\Big\}$$

$$= i\int d^4x \Big\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2$$

$$+\frac{i}{2}\int d^4y J^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)\Big\} \qquad (9-12)$$

となる．従って，式 (9-9) の変数変換で経路積分測度が不変であることを用いて，

$$\int \mathfrak{D}A \exp i\int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + J^\mu A_\mu\right\}$$

$$= \int \mathfrak{D}A' \exp i\int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2\right\}$$

$$\times \exp\frac{i^2}{2}\int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) J^\nu(y)$$

$$= N_0^{(A)} \exp\frac{i^2}{2}\int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{F\mu\nu}(x-y) J^\nu(y) \qquad (9-13)$$

が得られる．ここで，

$$N_0^{(A)} \equiv \int \mathfrak{D}A \exp i\int d^4x \left\{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right\} \qquad (9-14)$$

とした．

次に Dirac 場の項を考える．式 (9-4) の exp の肩に式 (9-9) を代入すると，

$$i\int d^4x \left\{\overline{\psi} i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right\}$$

$$= i\int d^4x \Big\{\overline{\psi}' i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\overline{\psi}'\psi' + \overline{\eta}\psi' + \overline{\psi}'\eta$$

$$+ i\int d^4y\, \overline{\eta}(y) S_F(y-x) i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x)$$

$$+ \overline{\psi}' i\int d^4y\, i\gamma^\mu\partial_\mu S_F(x-y)\,\eta(y)$$

$$- \int d^4y d^4y'\, \overline{\eta}(y) S_F(y-x) i\gamma^\mu\partial_\mu S_F(x-y')\eta(y')$$

$$- i\int d^4y\, \overline{\eta}(y) S_F(y-x) m\psi'(x) - \overline{\psi}' i\int d^4y m S_F(x-y)\eta(y)$$

$$+\int d^4yd^4y'\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)mS_F(x-y')\eta(y')$$

$$+\overline{\eta}i\int d^4yS_F(x-y)\eta(y)+i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)\eta(x)\Big\}$$

$$=i\int d^4x\Big\{\overline{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'-m\overline{\psi}'\psi'+\overline{\eta}\psi'+\overline{\psi}'\eta$$

$$-i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)\partial_\mu S_F(y-x)i\gamma^\mu\psi'(x)$$

$$-i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)m\psi'(x)$$

$$+\overline{\psi}'i\int d^4y(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)S_F(x-y)\eta(y)$$

$$-\int d^4yd^4y'\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)S_F(x-y')\eta(y')$$

$$+\overline{\eta}i\int d^4yS_F(x-y)\eta(y)+i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)\eta(x)\Big\}$$

$$=i\int d^4x\Big\{\overline{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'-m\overline{\psi}'\psi'+\overline{\eta}\psi'+\overline{\psi}'\eta$$

$$+i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)\Big(\partial_{y^\mu}S_F(y-x)i\gamma^\mu-mS_F(y-x)\Big)\psi'(x)$$

$$-\overline{\psi}'\eta-i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)\eta(x)$$

$$+i\int d^4y\,\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)+i\int d^4y\,\overline{\eta}(y)S_F(y-x)\eta(x)\Big\}$$

$$=i\int d^4x\Big\{\overline{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'-m\overline{\psi}'\psi'+\overline{\eta}\psi'-\overline{\eta}\psi'$$

$$+i\int d^4y\,\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\Big\}$$

$$=i\int d^4x\Big\{\overline{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'-m\overline{\psi}'\psi'+i\int d^4y\,\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\Big\} \tag{9-15}$$

となる．これから前と同様にして，

$$\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi \exp i \int d^4x \left\{\overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right\}$$

$$= \int \mathfrak{D}\overline{\psi}'\mathfrak{D}\psi' \exp i \int d^4x \left\{\overline{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' - m\overline{\psi}'\psi'\right\}$$

$$\times \exp i^2 \int d^4x d^4y\, \overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)$$

$$= N_0^{(\psi)} \exp i^2 \int d^4x d^4y\, \overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y) \tag{9-16}$$

が得られる．但し，

$$N_0^{(\psi)} \equiv \int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi \exp i \int d^4x \left\{\overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi\right\} \tag{9-17}$$

である．また，途中関係式

$$\partial_{y^\mu}S_F(y-x)i\gamma^\mu - mS_F(y-x) = i\delta^4(y-x)$$

を用いた．これは式 (9-7) の Hermite 共役をとってみれば明らかである．

以上をまとめて，自由場の生成汎関数 Z_0 は，

$$Z_0[J,\eta,\overline{\eta}] = \frac{1}{N_0}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A$$

$$\cdot \exp i \int d^4x \left\{\overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu\right\}$$

$$= \frac{1}{N_0}N_0^{(\psi)}N_0^{(A)} \exp i^2 \int d^4x d^4y \left\{\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right\}$$

$$= \exp i^2 \int d^4x d^4y \left\{\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right\} \tag{9-18}$$

と書き換えられる．定義より，$N_0 = N_0^{(\psi)}N_0^{(A)}$ となることを利用した．これより自由場の 2 点 Green 関数，すなわち Feynman 伝搬関数が得られる．まず，電磁場のそれを $G_{0\mu\nu}^{(2)(A)}[x,y]$ とすると，

$$G_{0\mu\nu}^{(2)(A)}[x,y] = \langle 0 \mid T\widehat{A}_\mu(x)\widehat{A}_\nu(y) \mid 0\rangle_0$$

$$= i^{-2}\frac{\delta^2}{\delta J^\mu(x)\delta J^\nu(y)} Z_0[J,\eta,\overline{\eta}]\Big|_{J=\eta=\overline{\eta}=0}$$

$$= D_{F\mu\nu}(x-y) \tag{9-19}$$

となる．また，Dirac 場の2点 Green 関数 $G_0^{(2)(\psi)}[x,y]$ は，

$$G_0^{(2)(\psi)}[x,y] = \langle 0 \mid T\widehat{\psi}(x)\widehat{\overline{\psi}}(y) \mid 0\rangle_0$$

$$= i^{-2}\frac{-\delta^2}{\delta\overline{\eta}(x)\delta\eta(y)} Z_0[J,\eta,\overline{\eta}]\Big|_{J=\eta=\overline{\eta}=0}$$

$$= S_F(x-y) \tag{9-20}$$

である．第2式の – は，Grassmann 数 $\eta, \overline{\eta}$ による微分を左微分の約束に従って実行することから生じたものである．

9-2 摂動論

この節では，7章で説明した摂動論を用いて電磁相互作用があるときのK点 Green 関数の具体的計算を行なう．枝線図形の代表例として最低次の Compton 散乱と Møller 散乱を，ループダイアグラムの代表例として光子の自己エネルギーに対する量子補正を取り上げる．この場合は，ループダイアグラムの常として運動量空間における積分が現われるが，それを求めるには多少の工夫が必要となるので次章にまわすことにする．

まず，これまでの説明から，$\mathcal{L}_{\text{int}}[x]$ があるときの生成汎関数 $Z[J,\eta,\overline{\eta}]$ は，

$$Z[J,\eta,\overline{\eta}]$$
$$= \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i\int d^4x\Big\{\mathcal{L}_0[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}[x]$$
$$+ J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\Big\} \tag{9-21}$$

であることがわかる．ここで，外場による汎関数微分を考えてみれば明らかなように，

$$A_\mu \longleftrightarrow i^{-1}\frac{\delta}{\delta J^\mu}$$

$$\psi \longleftrightarrow i^{-1}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}$$

$$\overline{\psi} \longleftrightarrow -i^{-1}\frac{\delta}{\delta\eta} \quad \text{(– は左微分の約束から生じた)}$$

の対応関係が成立しているので，$\mathcal{L}_{\text{int}}$ の中の場をこれらで置き換えることが許される．すなわち，

$$
\begin{aligned}
&Z[J,\eta,\overline{\eta}] \\
&= \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i\int d^4x\left\{\mathcal{L}_0[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right. \\
&\qquad \left. + \mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J^\mu}, -i^{-1}\frac{\delta}{\delta\eta}, i^{-1}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\right)\right\} e^{i\int d^4x(J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta)} \\
&= \frac{N_0}{N}\left\{\exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J^\mu}, -i^{-1}\frac{\delta}{\delta\eta}, i^{-1}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\right)\right\} Z_0[J,\eta,\overline{\eta}]
\end{aligned}
\tag{9-22}
$$

となる．この最右辺の Z_0 に式(9-18)の結果を代入すると

$$
\begin{aligned}
&Z[J,\eta,\overline{\eta}] \\
&= C\left\{\exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta J^\mu}, -i^{-1}\frac{\delta}{\delta\eta}, i^{-1}\frac{\delta}{\delta\overline{\eta}}\right)\right\} \\
&\qquad \cdot \exp i^2\int d^4x d^4y\left\{\overline{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}J^\mu(x)D_{F\mu\nu}(x-y)J^\nu(y)\right\}
\end{aligned}
\tag{9-23}
$$

が得られる．但し，$C \equiv N_0/N$ とした．更に，二つの汎関数の積の間で変数の入れ換えを行なうと

$$
\begin{aligned}
&Z[J,\eta,\overline{\eta}] \\
&= C\exp i^2\int d^4x d^4y\left\{-\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\psi}\right)S_F(x-y)\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}}\right)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\mu}\right)D_{F\mu\nu}(x-y)\left(i^{-1}\frac{\delta}{\delta A_\nu}\right)\right\} \\
&\qquad \cdot \exp i\int d^4x\left\{\mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu,\overline{\psi},\psi) + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right\}\Big|_{A_\mu=\psi=\overline{\psi}=0}
\end{aligned}
\tag{9-24}
$$

が得られる．ここで，$Z[J=0,\eta=0,\overline{\eta}=0]=1$ という条件を用いると，結局，

$$
Z[J,\eta,\overline{\eta}] = \frac{\begin{aligned}&\exp\int d^4x d^4y\left\{-\frac{\delta}{\delta\psi}S_F\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta A_\mu}D_{F\mu\nu}\frac{\delta}{\delta A_\nu}\right\} \\ &\quad \cdot \exp i\int d^4x\left\{\mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu,\overline{\psi},\psi) + J^\mu A_\mu + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta\right\}\Big|_{A_\mu=\psi=\overline{\psi}=0}\end{aligned}}{\begin{aligned}&\exp\int d^4x d^4y\left\{-\frac{\delta}{\delta\psi}S_F\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}} + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta A_\mu}D_{F\mu\nu}\frac{\delta}{\delta A_\nu}\right\} \\ &\quad \cdot \exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)\Big|_{A_\mu=\psi=\overline{\psi}=0}\end{aligned}}
\tag{9-25}
$$

となる．これが量子電磁力学における摂動論の基本式である．

例によって縮約記号 $\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ を導入する．今の場合，

$$\langle S[A_\mu,\overline{\psi},\psi]\rangle_{\rm con}$$
$$\equiv\left\{\exp\int d^4xd^4y\left(-\frac{\delta}{\delta\psi(x)}S_F(x-y)\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(y)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}D_{F\mu\nu}(x-y)\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\right)\right\}S[A_\mu,\overline{\psi},\psi]\Big|_{A_\mu=\psi=\overline{\psi}=0} \tag{9-26}$$

と定義される．そうすると式(9-25)は次のように書き換えられる．

$$Z[J,\eta,\overline{\eta}]=\frac{\left\langle\exp i\int d^4x\left\{\mathcal{L}_{\rm int}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta\right\}\right\rangle_{\rm con}}{\left\langle\exp i\int d^4x\mathcal{L}_{\rm int}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)\right\rangle_{\rm con}} \tag{9-27}$$

7章と同様，式(9-27)の分母は真空泡ダイアグラムに相当する．以後，これは考えないことにする．ここで最も簡単な場合の $\langle\cdot\rangle_{\rm con}$ を求めてみると

$$\langle A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\rangle_{\rm con}=D_{F\mu\nu}(x_1-x_2) \tag{9-28}$$

$$\langle\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\rangle_{\rm con}=S_F(x_1-x_2) \tag{9-29}$$

である．詳しい計算は前に行なっているので省略する．

(1) Compton散乱

Compton散乱は気体にX線を照射したときの光子と電子との衝突(散乱) 過程のことであり，散乱されたX線の波長が入射X線の波長より長いということをComptonが発見したので，こう呼ばれているのである．この現象は2体の散乱過程であり，外場としては4次の項を考えればよい．式(9-27)から4次の項を抽出する仕方は様々であるが，Compton散乱は光子と電子の衝突過程であるから，$\overline{\eta}$ と η についてはそれぞれ1次，J^μ については2次の項を考えればよい．式で表わすと，

$$Z^{(4)}[J,\eta,\overline{\eta}]=\frac{i^4}{2!}\int d^4x_1d^4x_2d^4x_3d^4x_4\ \overline{\eta}(x_1)\eta(x_2)J^\mu(x_3)J^\nu(x_4)$$
$$\times\left\langle\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)A_\mu(x_3)A_\nu(x_4)e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\rm int}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)}\right\rangle_{\rm con} \tag{9-30}$$

となる．これから4点Green関数（A が2個，ψ と $\overline{\psi}$ がそれぞれ1個ずつ）は，

$$
\begin{aligned}
&G^{(4)}_{\mu\nu}[x_1, x_2; x_3, x_4] \\
&= \left\langle \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)A_\mu(x_3)A_\nu(x_4)e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)} \right\rangle_{\text{con}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!}\int d^4y_1\cdots d^4y_m\langle\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)A_\mu(x_3)A_\nu(x_4)\mathcal{L}_{\text{int}}[y_1] \\
&\qquad\qquad\cdots\mathcal{L}_{\text{int}}[y_m]\rangle_{\text{con}} \qquad (9-31)
\end{aligned}
$$

と表わされる．$m=0$ のときは電磁相互作用による散乱はなく，$m=1$ のときは $\langle\cdot\rangle_{\text{con}}$ の定義から明らかなように0となってしまう．従って，最低次のCompton散乱は $m=2$ のときに実現される．式$(9-31)$より，$\mathcal{L}_{\text{int}}[y]=\overline{\psi}(y)e\gamma^\rho\psi(y)A_\rho(y)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
&G^{(4)}_{2\mu\nu}[x_1, x_2; x_3, x_4] \\
&= \frac{i^2}{2}\int d^4y_1d^4y_2\langle\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)A_\mu(x_3)A_\nu(x_4)\overline{\psi}(y_1)e\gamma^\rho\psi(y_1)A_\rho(y_1) \\
&\qquad\qquad\cdot\overline{\psi}(y_2)e\gamma^\sigma\psi(y_2)A_\sigma(y_2)\rangle_{\text{con}} \\
&= \frac{1}{2}\int d^4y_1d^4y_2\langle\psi(x_1)\overline{\psi}(y_1)(ie\gamma^\rho)\psi(y_1)\overline{\psi}(y_2)(ie\gamma^\sigma)\psi(y_2)\overline{\psi}(x_2) \\
&\qquad\qquad\cdot A_\mu(x_3)A_\rho(y_1)A_\sigma(y_2)A_\nu(x_4)\rangle_{\text{con}} \qquad (9-32)
\end{aligned}
$$

となる．$\langle\cdot\rangle_{\text{con}}$ の中の項の入れ換えは，ψ, $\overline{\psi}$ がGrassmann数の場であることを考慮して行なう必要がある．上式の $\langle\cdot\rangle_{\text{con}}$ の中のペアとなっている場を，式$(9-28)$, $(9-29)$を用いて伝搬関数に置き換える．その際 y_1 と y_2 を入れ換えたものも同じ散乱過程に寄与するので，因子2がかかり 1/2 を相殺する．その結果，

$$
\begin{aligned}
&G^{(4)}_{2\mu\nu}[x_1, x_2; x_3, x_4]\Big|_{\gamma e^-\text{散乱}} \\
&= \int d^4y_1d^4y_2S_F(x_1-y_1)(ie\gamma^\rho)S_F(y_1-y_2)(ie\gamma^\sigma)S_F(y_2-x_2) \\
&\qquad\qquad\times D_{F\mu\rho}(x_3-y_1)D_{F\sigma\nu}(y_2-x_4) \qquad (9-33)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，Green関数のFourier変換を前と同様にして

$$
\begin{aligned}
&i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)G^{(4)}_{2\mu\nu}[p_1, p_2; p_3, p_4]\Big|_{\gamma e^-\text{散乱}} \\
&\equiv \int d^4x_1\cdots d^4x_4\, e^{i(p_1x_1+\cdots+p_4x_4)}G^{(4)}_{2\mu\nu}[x_1, x_2; x_3, x_4]\Big|_{\gamma e^-\text{散乱}}
\end{aligned}
$$

と定義し，右辺に式 (9-33) を代入すると

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)G^{(4)}_{2\mu\nu}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{\gamma e^-\text{散乱}}$$

$$= \int d^4x_1\cdots d^4x_4\, e^{i(p_1x_1+\cdots+p_4x_4)}$$

$$\times \int d^4y_1 d^4y_2 S_F(x_1-y_1)(ie\gamma^\rho)S_F(y_1-y_2)(ie\gamma^\sigma)$$

$$\times S_F(y_2-x_2)D_{F\mu\rho}(x_3-y_1)D_{F\sigma\nu}(y_2-x_4) \qquad (9-34)$$

が得られる．更に，

$$\left.\begin{aligned} S_F(x-y) &= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{\not k - m}e^{-ik(x-y)} \\ &\equiv \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}S_F(k)e^{-ik(x-y)} \\ D_{F\mu\nu}(x-y) &= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k\mu k\nu}{k^2}}{k^2}e^{-ik(x-y)} \\ &\equiv \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}D_{F\mu\nu}(k)e^{-ik(x-y)} \end{aligned}\right\} \qquad (9-35)$$

を代入すると

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)G^{(4)}_{2\mu\nu}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{\gamma e^-\text{散乱}}$$

$$= \int d^4x_1\cdots d^4x_4 \int d^4y_1d^4y_2 \int \frac{id^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_4}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot S_F(k_1)(ie\gamma^\rho)S_F(k_a)$$

$$\times (ie\gamma^\sigma)S_F(k_2)D_{F\mu\rho}(k_3)D_{F\sigma\nu}(k_4)e^{i(p_1-k_1)x_1}e^{i(p_2+k_2)x_2}$$

$$\times e^{i(p_3-k_3)x_3}e^{i(p_4+k_4)x_4}e^{i(k_1+k_3-k_a)y_1}e^{i(k_a-k_2-k_4)y_2}$$

$$= \int \frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}iS_F(p_1)(ie\gamma^\rho)S_F(k_a)(ie\gamma^\sigma)iS_F(-p_2)iD_{F\mu\rho}(p_3)$$

$$\times iD_{F\sigma\nu}(-p_4)\,(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_3-k_a)(2\pi)^4\delta^4(k_a+p_2+p_4)$$

$$= iS_F(p_1)(ie\gamma^\rho)S_F(p_1+p_3)(ie\gamma^\sigma)iS_F(-p_2)iD_{F\mu\rho}(p_3)iD_{F\sigma\nu}(-p_4)$$

$$\times i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_3+p_2+p_4) \qquad (9-36)$$

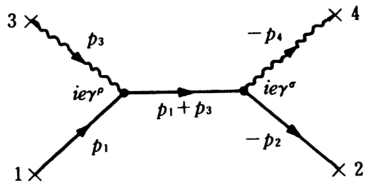


図 9－1

となる．これより直ちに

$$G^{(4)}_{2\mu\nu}[p_1, p_2; p_3, p_4]\Big|_{\gamma e^- \text{散乱}}$$
$$= iS_F(p_1)(ie\gamma^\rho)S_F(p_1+p_3)(ie\gamma^\sigma)iS_F(-p_2)iD_{F\mu\rho}(p_3)iD_{F\sigma\nu}(-p_4) \tag{9-37}$$

が得られる．

これがCompton散乱の運動量空間におけるGreen関数の表式である．これに $S_F(p)$, $D_{F\mu\nu}(p)$ の具体形を代入することにより，様々な条件下の散乱断面積などが計算できるのであるが，それは他書に譲る[1)]．式 (9－37) から得られる Feynman ダイアグラムを描くと図 9–1 となる．

また，式 (9－32) において $A_\rho(y_1)$ と $A_\sigma(y_2)$ の順序を入れ換えて，電磁場のペアを組み替えたものから導かれる Green 関数は，以下のとおりである．

$$G^{(4)}_{2\mu\nu}[p_1, p_2; p_3, p_4]\Big|_{\gamma e^- \text{散乱（交換）}}$$
$$= iS_F(p_1)(ie\gamma^\rho)S_F(p_1+p_4)(ie\gamma^\sigma)iS_F(-p_2)iD_{F\rho\nu}(-p_4)iD_{F\mu\sigma}(p_3) \tag{9-38}$$

これから得られる Feynman ダイアグラムは図 9–2 である．

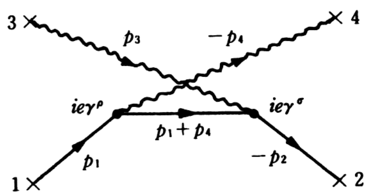


図 9－2

ここで用いた手法をいろいろな散乱過程に適用すれば，直ちに Green 関数と Feynman ダイアグラムが得られる．

1) 例えば，F. ハルツェン他著，小林他訳：「クォークとレプトン」，培風館（1986），148 ページ．

(2) Møller 散乱

これは電子－電子散乱過程なので，やはり外場の4次の項（η と $\overline{\eta}$ についてそれぞれ2次）を考えればよい．生成汎関数は

$$Z^{(4)}[J,\eta,\overline{\eta}] = \frac{i^4}{(2!)^2}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4\ \overline{\eta}(x_1)\eta(x_2)\overline{\eta}(x_3)\eta(x_4) \times \left\langle \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\psi(x_3)\overline{\psi}(x_4)e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\rm int}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)}\right\rangle_{\rm con} \tag{9-39}$$

であるから，4点 Green 関数（ψ と $\overline{\psi}$ がそれぞれ2個ずつ）は，

$$G^{(4)}[x_1,x_2;x_3,x_4] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!}\int d^4y_1\cdots d^4y_m\left\langle \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\psi(x_3)\overline{\psi}(x_4)\mathcal{L}_{\rm int}[y_1] \cdots\mathcal{L}_{\rm int}[y_m]\right\rangle_{\rm con} \tag{9-40}$$

となる．最低次の Møller 散乱はやはり $m=2$ のときに実現され，

$$G_2^{(4)}[x_1,x_2;x_3,x_4] = \frac{1}{2}\int d^4y_1 d^4y_2\left\langle \psi(x_1)\overline{\psi}(y_1)(ie\gamma^\mu)\psi(y_1)\overline{\psi}(x_2) \cdot A_\mu(y_1)A_\nu(y_2)\psi(x_3)\overline{\psi}(y_2)(ie\gamma^\nu)\psi(y_2)\overline{\psi}(x_4)\right\rangle_{\rm con} \tag{9-41}$$

となる．後は，Compton 散乱のときと全く同様にして運動量空間における Green 関数の表式を求めればよい．そうすると，

$$G_2^{(4)}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{e^-e^-\text{散乱}} = iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_2)D_{F\mu\nu}(p_1+p_2)iS_F(p_3)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_4) \tag{9-42}$$

が得られる．Feynman ダイアグラムは図 9–3 になる．

また，式 (9-41) において $\overline{\psi}(x_2)$ と $\overline{\psi}(x_4)$ を入れ換えたものから導かれる Green 関数は次のようになる．

$$G_2^{(4)}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{e^-e^-\text{散乱（交換）}}$$

$$= -iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_4)D_{F\mu\nu}(p_1+p_4)iS_F(p_3)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_2) \tag{9-43}$$

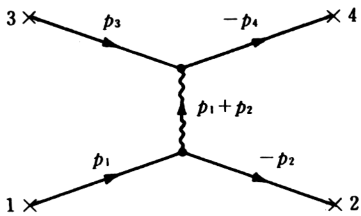


図 9－3

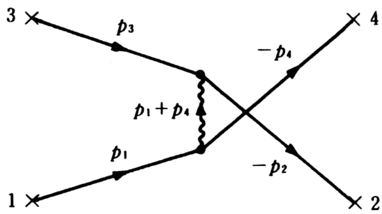


図 9－4

これから得られる Feynman ダイアグラムが図 9–4 である．式 (9－43) 右辺に－がついているのは，入れ換えを行なった $\overline{\psi}$ が Grassmann 数の場だからである．

次に，電子－陽電子散乱についても言及しておこう．陽電子 (電子の反粒子) は，時間に対して逆向きに進む電子と解釈できるので，図 9–3 において一方の電子の矢印を逆転させればまさにそれが電子－陽電子の散乱過程となる．従って，次の Green 関数が得られる．

$$G_2^{(4)}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{e^-e^+\text{散乱}}$$
$$= iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_2)D_{F\mu\nu}(p_1+p_2)iS_F(p_4)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_3) \tag{9-44}$$

Feynman ダイアグラムは図 9–5 である．

更に，出ていく二つの電子の入れ換えを行なうと，電子－陽電子消滅生成過程 (図 9–6) となる．この場合も Grassmann 数の場の入れ換えを行なうので－がつく．

$$G_2^{(4)}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{e^-e^+\text{消滅}}$$
$$= -iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_3)D_{F\mu\nu}(p_1+p_3)iS_F(p_4)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_2) \tag{9-45}$$

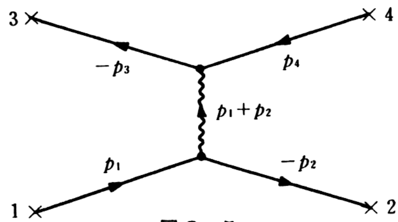


図 9-5

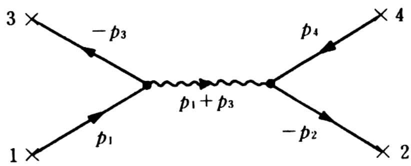


図 9-6

(3) 光子の自己エネルギーに対する量子補正

量子論では電子ー陽電子の生成消滅過程が存在し，その結果光子の Feynman 伝搬関数が補正を受ける．このときのループダイアグラムの 2 点 Green 関数のことを光子の自己エネルギーに対する量子補正という．

まず，外場の 2 次の項（J^μ について 2 次）を式 (9-27) から抽出すると，

$$Z^{(2)}[J,\eta,\overline{\eta}] = \frac{i^2}{2!}\int d^4x_1 d^4x_2 J^\mu(x_1)J^\nu(x_2) \times \left\langle A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\, e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\rm int}(A_\mu\overline{\psi},\psi)}\right\rangle_{\rm con} \qquad (9-46)$$

である．よって，2 点 Green 関数は，

$$G^{(2)}_{\mu\nu}[x_1,x_2] = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^m}{m!}\int d^4y_1\cdots d^4y_m\langle A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\mathcal{L}_{\rm int}[y_1]\cdots\mathcal{L}_{\rm int}[y_m]\rangle_{\rm con} \qquad (9-47)$$

となる．$m=0$ の項はもちろん自由場に相当するので，光子の Feynman 伝搬関数となり，$m=1$ のときは $\langle\cdot\rangle_{\rm con}=0$ であるから，結局，最低次の自己エネルギーの補正は $m=2$ の項であることがわかる．従って，

$$G^{(2)}_{2\mu\nu}[x_1,x_2] = \frac{1}{2}\int d^4y_1 d^4y_2\langle A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)\overline{\psi}(y_1)(ie\gamma^\rho)\psi(y_1)A_\rho(y_1) \cdot\overline{\psi}(y_2)(ie\gamma^\sigma)\psi(y_2)A_\sigma(y_2)\rangle_{\rm con}$$

$$= \frac{1}{2}(-1)\mathrm{Tr}\int d^4y_1 d^4y_2 \langle A_\mu(x_1)A_\rho(y_1)(ie\gamma^\rho) \cdot \psi(y_1)\overline{\psi}(y_2)(ie\gamma^\sigma)\psi(y_2)\overline{\psi}(y_1)A_\sigma(y_2)A_\nu(x_2)\rangle_{\mathrm{con}} \quad (9-48)$$

を考えればよい．最右辺の $(-1)\mathrm{Tr}$ は，7章の式 (7-95) で説明したとおりである．$\langle\cdot\rangle_{\mathrm{con}}$ の中のペアとなっている場を伝搬関数に置き換えると，

$$G^{(2)}_{2\mu\nu}[x_1,x_2]\Big|_{\text{光子自己エネルギー}} = -\mathrm{Tr}\int d^4y_1 d^4y_2 D_{F\mu\rho}(x_1-y_1)(ie\gamma^\rho) \times S_F(y_1-y_2)(ie\gamma^\sigma)S_F(y_2-y_1)D_{F\sigma\nu}(y_2-x_2) \quad (9-49)$$

となる．但し，y_1 と y_2 を入れ換えたものからの寄与も考慮して因子2をかけた．次に Fourier 変換を実行すると，

$$\begin{aligned}
&i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2)G^{(2)}_{2\mu\nu}[p_1,p_2]\Big|_{\text{光子自己エネルギー}} \\
&= \int d^4x_1 d^4x_2 e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}(-\mathrm{Tr})\int d^4y_1 d^4y_2 D_{F\mu\rho}(x_1-y_1) \\
&\quad \times (ie\gamma^\rho)S_F(y_1-y_2)(ie\gamma^\sigma)S_F(y_2-y_1)D_{F\sigma\nu}(y_2-x_2) \\
&= -\mathrm{Tr}\int d^4x_1 d^4x_2 \int d^4y_1 d^4y_2 \int \frac{id^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_b}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_2}{(2\pi)^4} \\
&\quad \cdot D_{F\mu\rho}(k_1)(ie\gamma^\rho)S_F(k_a) \\
&\quad \times(ie\gamma^\sigma)S_F(k_b)D_{F\sigma\nu}(k_2)e^{i(p_1-k_1)x_1}e^{i(p_2+k_2)x_2} \\
&\quad \times e^{i(k_1-k_a+k_b)y_1}e^{i(k_a-k_b-k_2)y_2} \\
&= -\mathrm{Tr}\int \frac{id^4k_a}{(2\pi)^4} iD_{F\mu\rho}(p_1)(ie\gamma^\rho)S_F(k_a)(ie\gamma^\sigma)S_F(k_a+p_2) \\
&\quad \times iD_{F\sigma\nu}(-p_2)i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2) \qquad (9-50)
\end{aligned}$$

となるから，これより $k_a=k$, $p_1=-p_2=p$ として，

$$G^{(2)}_{2\mu\nu}[p_1,p_2]\Big|_{\text{光子自己エネルギー}} = iD_{F\mu\rho}(p)\left\{-\mathrm{Tr}\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\rho)S_F(k)(ie\gamma^\sigma)S_F(k-p)\right\}iD_{F\sigma\nu}(p) \quad (9-51)$$

が得られる．4次元積分 $\int d^4k$ が残っている点に注意を払う必要がある．

これから，光子の自己エネルギーに対する量子補正の Feynman ダイアグラムが描

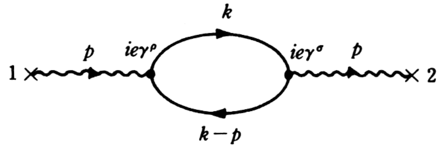


図 9-7

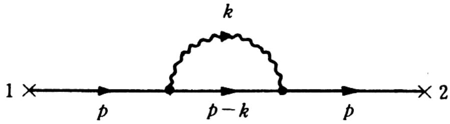


図 9-8

ける (図 9–7).

量子電磁力学では，これ以外にも基本的な 1 ループダイアグラムが存在する．一つは電子の自己エネルギー補正 (図 9–8) であり，Green 関数は次のとおりである．

$$G_2^{(2)}[p_1,p_2]\Big|_{\text{電子自己エネルギー}} = iS_F(p)\left\{\int\frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\mu)S_F(p-k)(ie\gamma^\nu)D_{F\mu\nu}(k)\right\}iS_F(p) \tag{9-52}$$

もう一つは頂点関数の補正 (図 9–9) である．次式の $\{\cdot\}$ 全体に i がかかっているのは頂点関数の特徴である．

$$\begin{aligned} G_{3\sigma}^{(3)}[p_1,p_2;p_3]\Big|_{\text{頂点}} &= iS_F(p_1)i\left\{\int\frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\mu)S_F(p_1-k)(ie\gamma^\rho)\right.\\ &\left.\times S_F(p_1-k+p_3)(ie\gamma^\nu)D_{F\mu\nu}(k)\right\}iS_F(-p_2)iD_{F\rho\sigma}(p_3) \end{aligned} \tag{9-53}$$

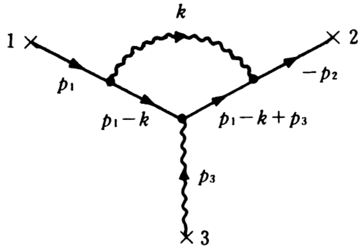


図 9-9

ここで示したように，ループダイアグラムのGreen関数には全て $\int d^4k$ 積分が含まれている．被積分関数に伝搬関数の具体形を代入してみれば明らかなように，なんとこの積分は発散してしまうのである．補正の計算をしているにもかかわらず発散してしまうのである．これが量子電磁力学の最大の問題であり，今世紀中頃になってやっとこの無限大をうまく取り扱う処方せんが発見された．それがくり込み理論である．これについては次の章で述べることにする．

最後に微細構造定数 α について一言つけ加えておく．この節で述べてきた摂動論をもう一度振り返ってみると，その本質は

$$e^{i\int d^4y\mathcal{L}_{\rm int}(A_\mu,\overline{\psi},\psi)}=e^{i\int d^4ye\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}$$

における e^2 展開であることがわかる．式(9−53)にのみ e^3 が現われているが，頂点関数は最低次ですでに e を含んでいるので，結局ここでも e^2 展開を行なっていることになる．つまり，量子電磁力学の摂動論とは e^2 展開のことなのである．ここで得られたGreen関数から散乱断面積を計算してみると[1)]，そこには必ず

$$\alpha\equiv\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\simeq\frac{1}{137}\qquad(9-54)$$

のべきが含まれていることがわかる．上の式では $\hbar$ と c を復活させた．この α を微細構造定数という．その値が小さいことが，量子電磁力学の摂動論の精度の高さにつながっているのである．厳密に言うと，α はエネルギーの増加と共にわずかに大きくなっていくのであるが，ここで扱ったような低エネルギー領域での計算においてはそのようなことを考慮する必要はない．

9−3　Feynman則

この節では，これまでに明らかとなった量子電磁力学のFeynman則をまとめておく．

① 端点に相当するK個の × 印を描き，それらに番号を付す．それらの間に相互作用の次数だけ頂点の ● 印を描く．× 印からは，電子ならば1本の実線，光子ならば1本の波線が出るとし，● 印からは2本の実線と1本の波線が出るとする．過不足なくこれらの点を結ぶ．各線には運動量保存則を満たすように運動量を付す．

② 運動量 p の外線には，電子ならば $iS_F(p)$（伝搬関数の i 倍）を，光子ならば $iD_{F\mu\nu}(p)$ を対応させる．

③ 運動量 k の内線には，電子ならば $S_F(k)$ を，光子ならば $D_{F\mu\nu}(k)$ を対応させる．

④ 相互作用の各頂点には $ie\gamma^\mu$ を対応させる．

---

1) 例えば，F. ハルツェン他著，小林他訳：「クォークとレプトン」，培風館 (1986)，94ページ．

⑤　光子が関与するループについては，4 次元積分 $\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}$ を実行する．

⑥　電子のみからなるループについては，$-\mathrm{Tr}$ をつけ，4 次元積分 $\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}$ を実行する．

⑦　②, ③, ④の各項をかけ合わせ，ループの場合は⑤, ⑥を考慮して，最後に①で描いたダイアグラムの統計因子をかけることにより，運動量空間の K 点 Green 関数が得られる．

演習問題

1. 式 (9－8) が式 (9－6) を満たすことを示せ．
2. $S_F^\dagger(x-y)\gamma^0 = -\gamma^0 S_F(y-x)$ を示せ．
3. $\partial_{y^\mu} S_F(y-x) i\gamma^\mu - mS_F(y-x) = i\delta^4(x-y)$ を示せ．
4. 式 (9－42) を導出せよ．

第10章
くり込み理論

本章では，今世紀中頃に提唱された朝永，Schwinger，Feynman，Dyson によるくり込み理論を主として述べる．これにより量子電磁力学が完成したと言ってよい．摂動論のところでも触れたように，電磁相互作用のループダイアグラムから求まる Green 関数の中の運動量積分は，ループ運動量が大きくなると発散してしまう．そこで，この積分を正則化する必要が生じる．その方法としては，運動量の切断パラメータを人為的に導入し，積分を収束させる Pauli-Villars の正則化や，時空次元を n 次元に拡張して積分を計算し，極の部分と有限部分を分離してしまう，'t Hooft と Veltman の次元正則化などがある．後者は，ゲージ不変性を保持しながら行なえるという点で前者よりはるかに優れている．ここでは，次元正則化を用いて発散積分を計算し，くり込み理論を説明していくことにする．

くり込み理論を考えるときには K 点 Green 関数そのものではなくて，1 粒子既約な頂点関数を考えれば十分なので，まずはその説明から始める．

10－1　有効作用

内線を切っても二つに分離しないダイアグラムを，1 粒子既約なダイアグラムという．1 粒子既約なダイアグラムの頂点関数の生成汎関数は，有効作用と呼ばれている．それは次のようにして定義される．

7 章で述べた連結した K 点 Green 関数の生成汎関数の定義を思い起こすと，

$$Z[J,\eta,\overline{\eta}] = e^{iW[J,\eta,\overline{\eta}]} \tag{10-1}$$

である．これから例えば，

$$\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^{\mu}} = -i\frac{1}{Z[J,\eta,\overline{\eta}]}\frac{\delta Z[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^{\mu}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A A_{\mu}(x)\exp i\int d^4x\mathcal{L}_t[x]}{\displaystyle\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i\int d^4x\mathcal{L}_t[x]}$$

$$= \frac{\langle 0|T\widehat{A}_\mu(x)\exp i\int d^4x(J^\mu\widehat{A}_\mu + \widehat{\overline{\psi}}\eta + \overline{\eta}\widehat{\psi})|0\rangle}{\langle 0|T\exp i\int d^4x(J^\mu\widehat{A}_\mu + \widehat{\overline{\psi}}\eta + \overline{\eta}\widehat{\psi})|0\rangle}$$

が得られる．ここで，$\mathcal{L}_t[x]$ は外場も含む全 Lagrangian 密度であり，最右辺の項は，外場が存在するときの電磁場 $\widehat{A}_\mu(x)$ の真空期待値になっている．そこで，これを $A_{0\mu}(x)$ と書くことにすると，上式は

$$\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^\mu(x)} = A_{0\mu}(x) \qquad (10-2)$$

となる．全く同様にして，

$$\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(x)} = -\overline{\psi}_0(x)$$
$$\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\overline{\eta}(x)} = \psi_0(x) \qquad (10-3)$$

が得られる．上の式の − は Grassmann 数の左微分の約束による．これらの真空期待値を用いて $W[J,\eta,\overline{\eta}]$ の Legendre 変換を行ない，有効作用 $\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]$ を定義する．

$$\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0] \equiv W[J,\eta,\overline{\eta}] - \int d^4x(J^\mu A_{0\mu} + \overline{\eta}\psi_0 + \overline{\psi}_0\eta) \qquad (10-4)$$

この式から例えば，

$$\frac{\delta\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta A_{0\mu}(x)} = \int d^4y\left\{\frac{\delta J^\nu(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^\nu(y)} + \frac{\delta\overline{\eta}(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\overline{\eta}(y)} + \frac{\delta\eta(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(y)}\right\}$$
$$-\int d^4y\left\{\frac{\delta J^\nu(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}A_{0\nu}(y) + \frac{\delta\overline{\eta}(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\psi_0(y) + \overline{\psi}_0(y)\frac{\delta\eta(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\right\} - J^\mu(x)$$
$$= \int d^4y\left\{\frac{\delta J^\nu(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}A_{0\nu}(y) + \frac{\delta\overline{\eta}(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\psi_0(y) + \overline{\psi}_0(y)\frac{\delta\eta(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\right\}$$
$$-\int d^4y\left\{\frac{\delta J^\nu(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}A_{0\nu}(y) + \frac{\delta\overline{\eta}(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\psi_0(y) + \overline{\psi}_0(y)\frac{\delta\eta(y)}{\delta A_{0\mu}(x)}\right\} - J^\mu(x)$$
$$= -J^\mu(x) \qquad (10-5)$$

となる．途中， Grassmann 数の反可換性を用いた．同様にして，

$$\frac{\delta\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\psi_0(x)}=\overline{\eta}(x)$$
$$\frac{\delta\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(x)}=-\eta(x) \tag{10-6}$$

が得られる.

次に，式(10-4)で定義された有効作用が1粒子既約な頂点関数の生成汎関数となっていることを示す．一般的な証明を行なうよりも具体的な例でみてみることにする．その方がわかり易いからである．まず，$\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]$ の2階汎関数微分を計算してみると，

$$\begin{aligned}\frac{\delta^2\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta A_{0\mu}(x_1)\delta A_{0\nu}(x_2)}&=-\frac{\delta}{\delta A_{0\mu}(x_1)}J^\nu(x_2)\\&=-\left(\frac{\delta A_{0\mu}(x_1)}{\delta J^\nu(x_2)}\right)^{-1}=-\left\{\frac{\delta^2W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)\delta J^\nu(x_2)}\right\}^{-1}\end{aligned} \tag{10-7}$$

が得られる．ここで，$W[J,\eta,\overline{\eta}]$ は連結したGreen関数の生成汎関数であったことを思い起こすと，

$$i^{-2}\frac{\delta^2iW[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^\mu(x_1)\delta J^\nu(x_2)}\bigg|_{J=\eta=\overline{\eta}=0}=G^{(A)}_{c\mu\nu}[x_1,x_2] \tag{10-8}$$

であることがわかる．但し，外線が光子であることを明記するために (A) を上添字として，連結を意味する c を下添字として付した．また，外場を0とすれば当然式(10-7)左辺の真空期待値 $A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0$ も0となる(対称性の自発的破れがある場合はこうはならないが，量子電磁力学では自発的対称性の破れはない)．従って，式(10-7)は

$$\frac{\delta^2i\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta A_{0\mu}(x_1)\delta A_{0\nu}(x_2)}\bigg|_{A_0=\overline{\psi}_0=\psi_0=0}=-G^{(A)-1}_{c\mu\nu}[x_1,x_2] \tag{10-9}$$

となる．同様にして，

$$\frac{\delta^2\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(x_1)\delta\psi_0(x_2)}=-\left\{\frac{\delta^2W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(x_1)\delta\overline{\eta}(x_2)}\right\}^{-1} \tag{10-10}$$

より，

$$\frac{\delta^2i\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(x_1)\delta\psi_0(x_2)}\bigg|_{A_0=\overline{\psi}_0=\psi_0=0}=-G^{(\psi)-1}_{c}[x_1,x_2] \tag{10-11}$$

が得られる.

以上の準備のもとに，連結2点Green関数 $G^{(\psi)}_c[x_1,x_2]$ を分解してみると，

$$G^{(\psi)}_c[x_1,x_2]$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^4y_1 G_c^{(\psi)}[x_1,y_1]\delta^4(y_1-x_2) \\
&= \int d^4y_1 G_c^{(\psi)}[x_1,y_1]\int d^4y_2 G_c^{(\psi)-1}[y_1,y_2]G_c^{(\psi)}[y_2,x_2] \\
&= \int d^4y_1 d^4y_2 G_c^{(\psi)}[x_1,y_1]\left(-\frac{\delta^2 i\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(y_1)\delta\psi_0(y_2)}\bigg|_{A_0=\overline{\psi}_0=\psi_0=0}\right)G_c^{(\psi)}[y_2,x_2]
\end{aligned}
\tag{10-12}
$$

となる．これはダイアグラムにおいて

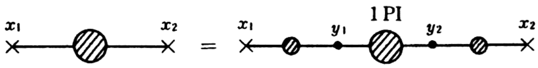


図 10-1

となっていることを意味しており，最右辺中の 2 点頂点関数

$$
i\Gamma^{(2)}[y_1,y_2] \equiv -i\,\frac{\delta^2\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(y_1)\delta\psi_0(y_2)}\bigg|_{A_0=\overline{\psi}_0=\psi_0=0}
\tag{10-13}
$$

は連結 Green 関数から 2 本の外線伝搬関数を取り去ったもの，すなわち1粒子既約 (1PI) な頂点関数となっていることがわかる[1]．これは，有効作用 $\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]$ がまさに1 粒子既約な頂点関数の生成汎関数となっていることを示している．図10–1中の blob は種々の相互作用を表わしている．

更に 3 点頂点関数について考えてみる．式(10-10)を $A_{0\nu}(x_3)$ でもう一回微分すると，

$$
\begin{aligned}
&i\frac{\delta^3\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(x_1)\delta\psi_0(x_2)\delta A_{0\nu}(x_3)} \\
&\quad = i\int d^4y_1 d^4y_2 \left\{\frac{\delta^2 W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(x_1)\delta\overline{\eta}(y_1)}\right\}^{-1} \\
&\qquad\qquad \times\left\{\frac{\delta}{\delta A_{0\nu}(x_3)}\frac{\delta^2 W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(y_2)}\right\}\left\{\frac{\delta^2 W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}\right\}^{-1} \\
&\quad = i\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \left\{\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_1)\delta\overline{\eta}(y_1)}\right\}^{-1} \\
&\qquad\qquad \times\left\{\frac{\delta J^\mu(y_3)}{\delta A_{0\nu}(x_3)}\frac{\delta^3 W}{\delta J^\mu(y_3)\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(y_2)}\right\}\left\{\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}\right\}^{-1}
\end{aligned}
$$

---

1) 実は厳密に言うと，2 点頂点関数の場合に限り，式(10-13)には自由伝搬関数の逆 $-S_F^{-1}(y_1,y_2)$ が含まれている．

$$= i\int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \left\{\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(x_1)\delta\overline{\eta}(y_1)}\right\}^{-1} \left\{\frac{\delta^2 W}{\delta J^\nu(x_3)\delta J^\mu(y_3)}\right\}^{-1}$$

$$\times \frac{\delta^3 W}{\delta J^\mu(y_3)\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(y_2)} \left\{\frac{\delta^2 W}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}\right\}^{-1}$$

$$= \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \left\{i^{-2}\frac{\delta^2 iW}{\delta\eta(x_1)\delta\overline{\eta}(y_1)}\right\}^{-1}$$

$$\times \left\{i^{-2}\frac{\delta^2 iW}{\delta J^\nu(x_3)\delta J^\mu(y_3)}\right\}^{-1} i^{-3}\frac{\delta^3 iW}{\delta J^\mu(y_3)\delta\eta(y_1)\delta\overline{\eta}(y_2)}$$

$$\times \left\{i^{-2}\frac{\delta^2 iW}{\delta\eta(y_2)\delta\overline{\eta}(x_2)}\right\}^{-1}$$

となるので，これを逆に解いて外場を 0 とすると，

$$G^{(A\psi)}_{c\mu}[x_1, x_2; x_3] = \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 G^{(\psi)}_c[x_1, y_1]$$
$$\times \left(i\, \frac{\delta^3\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(y_1)\delta\psi_0(y_2)\delta A_{0\nu}(y_3)}\bigg|_{A_0=\overline{\psi}_0=\psi_0=0}\right)$$
$$\times G^{(\psi)}_c[y_2, x_2] G^{(A)}_{c\nu\mu}[y_3, x_3] \qquad (10-14)$$

となる．ダイアグラムで表わすと，

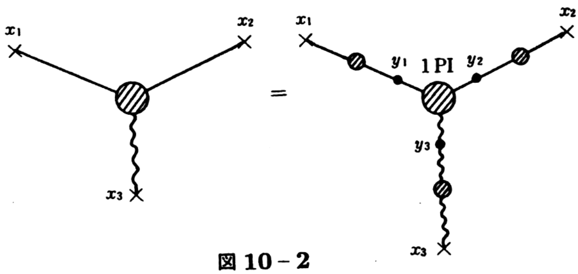


図 10－2

である．ここでも，$\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]$ から生成された 3 点頂点関数

$$i\Gamma^{(3)\nu}[y_1, y_2; y_3] \equiv -i\, \frac{\delta^3\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(y_1)\delta\psi_0(y_2)\delta A_{0\nu}(y_3)}\bigg|_{A_0=\overline{\psi}_0=\psi_0=0} \qquad (10-15)$$

が 1 粒子既約になっていることがわかる．

最後に有効作用 $\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]$ を頂点関数で展開した式を記しておく．

$$\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0] = \int d^4x_1 d^4x_2 \overline{\psi}_0(x_1)\Gamma^{(2)}[x_1, x_2]\psi_0(x_2)$$
$$+\frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 A_{0\mu}(x_1)\Gamma^{(2)\mu\nu}[x_1, x_2] A_{0\nu}(x_2)$$

$$+\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 A_{0\mu}(x_1)\overline{\psi}_0(x_2)\Gamma^{(3)\mu}[x_1,x_2,x_3]\psi_0(x_3)$$
$$+\cdots \tag{10-16}$$

これは頂点関数の定義から明らかなように，$A_0 = \overline{\psi}_0 = \psi_0 = 0$ のまわりでの展開式になっている．

また，有効作用 $\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]$ は，古典的作用積分とループダイアグラムからの量子補正の和になっていることが示されるが，ここでは省略する．

10 − 2　発散積分と次元正則化

この節では，1 ループダイアグラムの発散積分を次元正則化を用いて計算し，極の部分と有限部分とに分離する．次元正則化とは，時空次元を 4 から n に拡張して積分計算を行なう手段のことであり，$n < 4$ ならば被積分関数の次数が下がるので，発散を押さえることが可能となるのである．もちろん，後で $n \to 4$ とすることにより発散項が現われるが，そのときには極と有限部分とに分離されている．

(1)　電子の自己エネルギー

電子の 2 点 Green 関数は，1 粒子既約なダイアグラム全体 ($\Sigma(p)$ と表わす) がくり返し現われている項を全て加え合わせたものになっている．つまり，

$$\begin{aligned}
G^{(2)}[p_1,p_2]\Big|_{\text{内線}} &= S_F(p) + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) \\
&\qquad + S_F(p)\Sigma(p)S_F(p)\Sigma(p)S_F(p) + \cdots \\
&= S_F(p)\{1 + \Sigma(p)S_F(p) + (\Sigma(p)S_F(p))^2 + \cdots\} \\
&= S_F(p)\{1 - \Sigma(p)S_F(p)\}^{-1} \\
&= -\{-S_F^{-1}(p) + \Sigma(p)\}^{-1} \\
&= -\Gamma^{(2)-1}[p]
\end{aligned} \tag{10-17}$$

と表わすことができる．最後の項は 1 粒子既約な 2 点頂点関数の逆になっている．このことから，1 粒子既約な頂点関数を考えることにより，全ての相互作用を含んだ Green 関数が得られることがわかる．以後，1 粒子既約な頂点関数のみの計算を実行していくことにする．

上式の $\Sigma(p)$ は 1 粒子既約なダイアグラムの全体を表わしているが，その最低次は 1 ループダイアグラムである．これが電子の自己エネルギーに対する最低次の量子補正であり，すでに 9 章の式 (9 − 52) でその形を求めておいた．ここで計算すべき 2 点

項点関数は，外線の伝搬関数を省いたものであるから，

$$\Sigma^{(1\mathrm{loop})}(p) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\mu)S_F(p-k)(ie\gamma^\nu)D_{F\mu\nu}(k) \tag{10-18}$$

である．これを次元正則化を用いて計算する．$S_F(p-k)$ と $D_{F\mu\nu}(k)$ の具体形を代入すると，

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1\mathrm{loop})}(p) &= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\mu)\frac{1}{\not p - \not k - m}(ie\gamma^\nu)\frac{-g_{\mu\nu}+(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2} \\ &= e^2\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma^\mu(\not p - \not k + m)\gamma_\mu - (1-\xi)\gamma^\mu(\not p - \not k + m)\gamma^\nu\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{\{(p-k)^2-m^2\}k^2}\end{aligned} \tag{10-19}$$

となる．これは 4 次元運動量空間の積分であるが，これを n 次元の積分へ拡張する．

$$\begin{aligned}&\Sigma^{(1\mathrm{loop})}_{(4-n)}(p) \\ &\quad = e^2\int \frac{id^nk}{(2\pi)^n}\frac{\gamma^\mu(\not p - \not k + m)\gamma_\mu - (1-\xi)\gamma^\mu(\not p - \not k + m)\gamma^\nu\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{\{(p-k)^2-m^2\}k^2}\end{aligned} \tag{10-20}$$

ここで，被積分関数に現われているいくつかの項について計算してみると，

$$\begin{aligned}&\gamma^\mu\gamma_\mu = \delta^\mu{}_\mu = n \\ &\gamma^\mu\not p\gamma_\mu = p_\nu\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = (2-n)\not p \\ &\gamma^\mu(\not p - \not k + m)\gamma^\nu k_\mu k_\nu = \not k(\not p - \not k + m)\not k = -k^2(\not p + \not k - m) + 2k\cdot p\not k\end{aligned} \tag{10-21}$$

などとなるから，

$$\begin{aligned}&\Sigma^{(1\mathrm{loop})}_{(4-n)}(p) \\ &\quad = e^2\int \frac{id^nk}{(2\pi)^n}\frac{(2-n)(\not p - \not k) + nm + (1-\xi)(\not p + \not k - m) - 2(1-\xi)\frac{k\cdot p\not k}{k^2}}{\{(p-k)^2-m^2\}k^2}\end{aligned} \tag{10-22}$$

が得られる．更に，計算を簡単化するために 7 章で述べた Euclid 化を実行する．ここでは経路積分を行なうわけではないが，式 (10-22) のような n 次元積分を行なう際にもこの手法は有効なのである．Euclid 化は，時間成分の i 倍を実パラメータに置き換えることであったから，今の場合

$$\begin{aligned}&k^0 \longrightarrow -ik^n \qquad k^n : \text{実パラメータ} \\ &k^i \longrightarrow k^i\end{aligned} \tag{10-23}$$

である．これより $k_\mu k^\mu$ は

$$k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - \boldsymbol{k}^2 \longrightarrow -\{(k^n)^2 + \boldsymbol{k}^2\} \tag{10-24}$$

と置き換えられるので，改めて，

$$\boldsymbol{k}^2 + (k^n)^2 \equiv k^2$$

と定義すると，結局，

$$k_\mu k^\mu \longrightarrow -k^2 \tag{10-25}$$

とすればよいことがわかる．従って，n 次元時空の計量も次のように置き換わる．

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow -\delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{10-26}$$

その他に式 (10-22) に現われている $\not{k}\ (= k_\mu\gamma^\mu)$ や $k\cdot p (= k_\mu p^\mu)$ も，$k_\mu k^\mu$ と全く同じに

$$\begin{aligned} \not{k} \quad &\longrightarrow \quad -\not{k}\ (\equiv -(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} + k^n\gamma^n)) \\ k\cdot p \quad &\longrightarrow \quad -k\cdot p (\equiv -(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p} + k^n p^n)) \end{aligned} \tag{10-27}$$

となる．そうすると，式 (10-22) は

$$\Sigma^{(1\mathrm{loop})}_{(4-n)E}(p)$$
$$= -e^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(2-n)(\not{p} - \not{k}) - nm + (1-\xi)(\not{p} + \not{k} + m) - 2(1-\xi)\frac{k\cdot p\not{k}}{k^2}}{\{(p-k)^2 + m^2\}k^2} \tag{10-28}$$

と書ける．後は，これを n 次元 Euclid 空間の積分として計算し，最後に式 (10-25)，(10-27) の置き戻しを行なえばよい．

まず，Feynman のパラメータ公式

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{\{xa + (1-x)b\}^2} \tag{10-29}$$

を用いると，

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int d^n k \frac{1}{\{(p-k)^2 + m^2\}k^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{[x\{(p-k)^2 + m^2\} + (1-x)k^2]^2} \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{[(k-xp)^2 + x(1-x)p^2 + xm^2]^2}$$

となるので，

$$k - xp \equiv k'$$

$$x(1-x)p^2 + xm^2 \equiv M_x^2$$

と置くと

$$I_1 = \int_0^1 dx \int d^n k' \frac{1}{(k'^2 + M_x^2)^2}$$

$$= \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{(k^2 + M_x^2)^2} \tag{10-30}$$

が得られる．積分公式

$$\frac{1}{(k^2 + M_x^2)^2} = \int_0^\infty ds\, s e^{-s(k^2 + M_x^2)} \tag{10-31}$$

を用いると，

$$I_1 = \int_0^1 dx \int d^n k \int_0^\infty ds\, s e^{-s(k^2 + M_x^2)}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^\infty ds\, s e^{-sM_x^2} \int d^n k e^{-sk^2}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^\infty ds\, s e^{-sM_x^2} \left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{n}{2}} = \int_0^1 dx \int_0^\infty ds\, s^{1-\frac{n}{2}} e^{-M_x^2 s} \pi^{\frac{n}{2}}$$

$$= \int_0^1 dx \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \left(M_x^2\right)^{\frac{n}{2}-2} \pi^{\frac{n}{2}}$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-32}$$

となる．ここで，$\varepsilon \equiv 2 - \frac{n}{2}$と置いて，Γ 関数（有効作用の Γ とは異なる）の公式

$$\Gamma(\varepsilon) t^{-\varepsilon} = \int_0^\infty ds\, s^{\varepsilon - 1} e^{-ts} \tag{10-33}$$

を用いた．

次に，被積分関数の分子に $\not{k}$ がある項の積分は，

$$I_2 \equiv \int d^n k \frac{\not{k}}{\{(p-k)^2 + m^2\} k^2}$$

$$= \int_0^1 dx \int d^n k \frac{\not{k}}{[(k-xp)^2 + x(1-x)p^2 + xm^2]^2}$$

$$= \int_0^1 dx \int d^n k' \frac{\not{k}' + x\not{p}}{(k'^2 + M_x^2)^2} = \int_0^1 dx \int d^n k \frac{x\not{p}}{(k^2 + M_x^2)^2}$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx\, x\not{p} \left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-34}$$

となる．途中，被積分関数の中で，k' の奇関数となっている項は積分すると 0 になる，ということを利用した．

もう一つ，分子に $k \cdot p\not{k}/k^2$ がある項の積分を行なう必要がある．式 (10-29) を拡張した Feynman のパラメータ公式

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\{xa + (1-x)b\}^{\alpha+\beta}} \tag{10-35}$$

を用いると，

$$I_3 \equiv \int d^n k \frac{k \cdot p\not{k}}{\{(p-k)^2 + m^2\}(k^2)^2}$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)\Gamma(2)} \int_0^1 dx \int d^n k \frac{k \cdot p\not{k}\,(1-x)}{[x\{(p-k)^2 + m^2\} + (1-x)k^2]^3}$$

$$= 2\int_0^1 dx \int d^n k \frac{k \cdot p\not{k}\,(1-x)}{[(k-xp)^2 + x(1-x)p^2 + xm^2]^3}$$

$$= 2\int_0^1 dx \int d^n k' \frac{p \cdot (k' + xp)(\not{k}' + x\not{p})(1-x)}{(k'^2 + M_x^2)^3}$$

$$= 2\int_0^1 dx \int d^n k \frac{p \cdot k\not{k}\,(1-x) + p^2\not{p}x^2(1-x)}{(k^2 + M_x^2)^3} \tag{10-36}$$

となる．ここで式 (10-31) と同様の積分公式

$$\frac{1}{(k^2 + M_x^2)^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, s^2 e^{-s(k^2 + M_x^2)} \tag{10-37}$$

より，

$$\int d^n k \frac{1}{(k^2 + M_x^2)^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, s^2 e^{-sM_x^2} \int d^n k e^{-sk^2}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2}\int_0^\infty ds\, s^\varepsilon e^{-M_x^2 s} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2}\Gamma(\varepsilon+1)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon-1}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2}\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\frac{1}{M_x^2}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-38}$$

$$\int d^n k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 + M_x^2)^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, s^2 e^{-sM_x^2} \int d^n k\; k^\mu k^\nu e^{-sk^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty ds\, s^2 e^{-sM_x^2}\frac{\delta^{\mu\nu}}{2}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{s^{1+\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{\delta^{\mu\nu}}{4}\pi^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty ds\, s^{1-\frac{n}{2}} e^{-M_x^2 s}$$

$$= \frac{\delta^{\mu\nu}}{4}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-39}$$

が得られるから,

$$I_3 = 2\int_0^1 dx p_\mu \gamma_\nu (1-x)\int d^n k\frac{k^\mu k^\nu}{(k^2+M_x^2)^3} + 2\int_0^1 dx p^2 \not{p} x^2(1-x)\int d^n k\frac{1}{(k^2+M_x^2)^3}$$

$$= 2\int_0^1 dx p_\mu \gamma_\nu (1-x)\frac{\delta^{\mu\nu}}{4}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} + 2\int_0^1 dx p^2 \not{p} x^2(1-x)\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2}\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\frac{1}{M_x^2}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx(1-x)\not{p}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} + \pi^{\frac{n}{2}}\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx p^2 x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2}\not{p}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$

$$= \pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{\frac{1}{2}(1-x)+\varepsilon p^2 x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2}\right\}\not{p}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-40}$$

となる.

以上から, 結局式(10-28)は

$$\Sigma^{(1\mathrm{loop})}_{(4-n)E}(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{(2-n)(\not{p}-x\not{p}) - nm + (1-\xi)(\not{p}+x\not{p}+m)\right\}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$
$$+\frac{e^2}{(2\pi)^n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx 2(1-\xi)\left\{\frac{1}{2}(1-x) + \varepsilon p^2 x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2}\right\}\not{p}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$
$$= -\frac{e^2}{(2\pi)^n}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\left\{(2-n)(1-x)\not{p} + 2(1-\xi)x\not{p} - (n-(1-\xi))m\right\}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$

$$+\frac{e^2}{(2\pi)^n}\pi^{\frac{n}{2}}\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx 2(1-\xi)p^2 \not{p} x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-41}$$

となる．これで n 次元積分は終了したので，後は $n \longrightarrow 4$，すなわち $\varepsilon \longrightarrow 0$ とすることにより，4 次元 Euclid 空間における結果を得る．ここで，くり込み群を考えるときに重要な役割りを演ずることになる，質量次元を持つ任意のパラメータ μ を導入する．n 次元では e が ε 次元の質量次元を有しているので，それを打ち消すためのものである．

$$\frac{e^2}{(2\pi)^n}\pi^{\frac{n}{2}} = e^2(4\pi)^{-\frac{n}{2}} = \frac{e^2}{(4\pi)^2}(4\pi)^{\varepsilon}$$

となることに注意して，

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1\mathrm{loop})}_{(4-n)E}(p) = &-\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon)\\ &\times\int_0^1 dx\left\{(2-n)(1-x)\not{p}+2(1-\xi)x\not{p}-(n-(1-\xi))m\right\}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\\ &+\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx 2(1-\xi)p^2\not{p}x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\end{aligned} \tag{10-42}$$

を得る．次に，

$$\begin{aligned}&\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \qquad \gamma : \text{Euler の定数}\\ &K^{-\varepsilon} = e^{\ln K^{-\varepsilon}} = e^{-\varepsilon \ln K} = 1 - \varepsilon \ln K + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{10-43}$$

を式 (10 − 42) に代入した後，$\varepsilon \longrightarrow 0$ とすると，

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1\mathrm{loop})}_{E}(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Biggl[&-\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)\\ &\times\int_0^1 dx\left\{(2-n)(1-x)\not{p}+2(1-\xi)x\not{p}-(n-(1-\xi))m\right\}\\ &\times\left(\frac{M_x^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}+\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx 2(1-\xi)p^2\not{p}x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2}\Biggr]\end{aligned} \tag{10-44}$$

となる．但し，

$$\begin{aligned}(4\pi\mu^2)^{\varepsilon}\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} &\simeq \varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)\left(\frac{M_x^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}\\ &\simeq (1-\varepsilon\gamma)\left(1-\varepsilon\ln\frac{M_x^2}{4\pi\mu^2}\right) \longrightarrow 1\end{aligned}$$

を利用した．更に，M_x^2 を置き戻して第 2 項において部分積分を行なうと，

$$\int_0^1 dx\, x^2(1-x)\frac{1}{M_x^2} = \frac{1}{4\pi\mu^2}\int_0^1 dx\, x(1-x)\frac{4\pi\mu^2}{m^2+(1-x)p^2}$$
$$= \frac{1}{p^2}\int_0^1 dx(1-2x)\ln\left(\frac{m^2+(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right)$$

となることに注意して,

$$\begin{aligned}\Sigma_E^{(1\mathrm{loop})}(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Biggl[&-\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)\\ &\times\int_0^1 dx\,\{(2-n)(1-x)\not p + 2(1-\xi)x\not p - (n-(1-\xi))m\}\\ &\times\left(\frac{xm^2+x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}\\ &+\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx 2(1-\xi)(1-2x)\not p\ln\left(\frac{m^2+(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right)\Biggr]\end{aligned} \qquad (10-45)$$

が得られる．明らかに極と有限部分とが分離されている．最後に，4 次元 Minkowski 空間に戻すために，式 (10-25),(10-27) の置き戻しを行なう．

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1\mathrm{loop})}(p) = &-\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)\\ &\times\int_0^1 dx\,\{-(2-n)(1-x)\not p - 2(1-\xi)x\not p - (n-(1-\xi))m\}\\ &\times\left(\frac{xm^2-x(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}\\ &-\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(4\pi)^2}\int_0^1 dx 2(1-\xi)(1-2x)\not p\ln\left(\frac{m^2-(1-x)p^2}{4\pi\mu^2}\right)\end{aligned} \qquad (10-46)$$

$\lim_{\varepsilon\to 0}$ は省略した．式 (10-46) の発散部分のみを取り出すと，

$$\begin{aligned}\Sigma_\infty^{(1\mathrm{loop})}(p) &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 dx\,\{2(1-x)\not p - 2(1-\xi)x\not p - (4-(1-\xi))m\}\\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\{\xi\not p - (4-(1-\xi))m\}\frac{1}{\varepsilon}\end{aligned} \qquad (10-47)$$

である．

(2)　光子の自己エネルギー

前と同様に，1 粒子既約な頂点関数を考えれば十分である．それは 9 章の式 (9-51) で外線の伝搬関数を省いたものであり，$\Pi^{\mu\nu(1\mathrm{loop})}(p)$ と記すことにすると，

$$\Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}(p) = -\mathrm{Tr}\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\mu)S_F(k)(ie\gamma^\nu)S_F(k-p)$$
$$= e^2\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu \frac{\not k + m}{k^2-m^2}\gamma^\nu \frac{\not k - \not p + m}{(k-p)^2-m^2}\right] \tag{10-48}$$

である．これを n 次元に拡張し，Euclid 化すると

$$\Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}_{(4-n)E}(p) = e^2\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{\mathrm{Tr}[\gamma^\mu(\not k - m)\gamma^\nu\{(\not k - \not p) - m\}]}{(k^2+m^2)\{(k-p)^2+m^2\}} \tag{10-49}$$

が得られる．ここで Dirac 代数の性質から導かれる関係式

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \not k \gamma^\nu \not k)$$
$$= k_\alpha k_\beta \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta)$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}k_\alpha k_\beta(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta} + \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}) \tag{10-50}$$

及び

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = -2^{\frac{n}{2}}\delta^{\mu\nu} \tag{10-51}$$

を用いると，

$$\Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}_{(4-n)E}(p)$$
$$= e^2 2^{\frac{n}{2}}\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\alpha(k_\beta - p_\beta)(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta} + \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha}) - m^2\delta^{\mu\nu}}{(k^2+m^2)\{(k-p)^2+m^2\}} \tag{10-52}$$

となる．

まずは Feynman のパラメータ公式を使って，式 (10-52) 中のいくつかの項を計算しておく．

$$I_1 \equiv \int d^nk \frac{1}{\{(k-p)^2+m^2\}(k^2+m^2)}$$
$$= \int_0^1 dx \int d^nk \frac{1}{[x\{(k-p)^2+m^2\} + (1-x)(k^2+m^2)]^2}$$
$$= \int_0^1 dx \int d^nk \frac{1}{[(k-xp)^2 + x(1-x)p^2 + m^2]^2} \tag{10-53}$$

ここで，

$$k - xp \equiv k'$$
$$x(1-x)p^2 + m^2 \equiv M_x^2$$

とおくと，式 (10−30) と同じ式になるので，直ちに

$$I_1 = \pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \tag{10-54}$$

が得られる．次に，

$$\begin{aligned}
I_2 &\equiv \int d^nk\frac{k_\alpha(k_\beta - p_\beta)}{\{(k-p)^2+m^2\}(k^2+m^2)} \\
&= \int_0^1 dx\int d^nk\frac{k_\alpha k_\beta - k_\alpha p_\beta}{[(k-xp)^2+x(1-x)p^2+m^2]^2} \\
&= \int_0^1 dx\int d^nk'\frac{(k'_\alpha + xp_\alpha)(k'_\beta + xp_\beta) - (k'_\alpha + xp_\alpha)p_\beta}{(k'^2+M_x^2)^2} \\
&= \int_0^1 dx\int d^nk\frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+M_x^2)^2} - \int_0^1 dx\,x(1-x)p_\alpha p_\beta\int d^nk\frac{1}{(k^2+M_x^2)^2}
\end{aligned} \tag{10-55}$$

において，第一項は式 (10−31) を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx\int d^nk\frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2+M_x^2)^2} &= \int_0^1 dx\int_0^\infty ds\,se^{-sM_x^2}\int d^nk\ k_\alpha k_\beta e^{-sk^2} \\
&= \int_0^1 dx\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\pi^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty ds\,s^{-\frac{n}{2}}e^{-M_x^2 s} \\
&= \int_0^1 dx\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon-1)\left(M_x^2\right)^{-(\varepsilon-1)} \\
&= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dxM_x^2\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}
\end{aligned} \tag{10-56}$$

となり，第二項は式 (10−54) の結果がそのまま使えるので結局，

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\pi^{\frac{n}{2}}\frac{1}{\varepsilon-1}\Gamma(\varepsilon)&\int_0^1 dxM_x^2\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} \\
&-\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(\varepsilon)\int_0^1 dx\,x(1-x)p_\alpha p_\beta\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}
\end{aligned} \tag{10-57}$$

となる．

以上から，式 (10−52) は

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu(1\mathrm{loop})}_{(4-n)E}(p) &= e^2(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(2\pi)^n}\Gamma(\varepsilon) \\
&\times\left\{\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2}\int_0^1 dxM_x^2\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} - \int_0^1 dx\,x(1-x)p_\alpha p_\beta\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\right\}
\end{aligned}$$

$$\times(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} - \delta^{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta} + \delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\alpha})$$

$$-e^2(2\pi)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(2\pi)^n}m^2\Gamma(\varepsilon)\delta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$

$$= e^2\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(\varepsilon)\left\{\frac{1}{\varepsilon-1}\frac{2-n}{2}\delta^{\mu\nu}\int_0^1 dxM_x^2\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\right.$$

$$\left.-(2p^\mu p^\nu - \delta^{\mu\nu}p^2)\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} - m^2\delta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\right\}$$

$$= e^2\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(\varepsilon)\left[\delta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\{x(1-x)p^2+m^2\}\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\right.$$

$$\left.-(2p^\mu p^\nu - \delta^{\mu\nu}p^2)\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon} - m^2\delta^{\mu\nu}\int_0^1 dx\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}\right]$$

$$= e^2\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\Gamma(\varepsilon)2(\delta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(M_x^2\right)^{-\varepsilon}$$

$$= \frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(2\pi)^2}\Gamma(\varepsilon)2(\delta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)$$

$$\times\int_0^1 dx\,x(1-x)\left(\frac{x(1-x)p^2+m^2}{2\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \qquad (10-58)$$

となる．最後の変形は，

$$\frac{e^2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(2\pi)^2}(2\pi)^\varepsilon\mu^{2\varepsilon} = \frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{2\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}$$

を利用した．次に，式 (10-43) を代入して，$\varepsilon \longrightarrow 0$ とすると，

$$\Pi_E^{\mu\nu(\mathrm{1loop})}(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)2(\delta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\right.$$

$$\left.\times\int_0^1 dx\,x(1-x)\left\{1-\varepsilon\ln\left(\frac{x(1-x)p^2+m^2}{2\pi\mu^2}\right)\right\}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(2\pi)^2}2(\delta^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\right.$$

$$\left.\times\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)\frac{1}{6} - \int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\left(\frac{x(1-x)p^2+m^2}{2\pi\mu^2}\right)\right\}\right]$$

$$(10-59)$$

が得られる．最後に，式 (10-25),(10-26) の置き戻しを行なう．その際，$\lim_{\varepsilon\to 0}$ は省く．

$$\Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}(p)=\frac{(e\mu^{-\varepsilon})^2}{(2\pi)^2}(g^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu)$$
$$\times\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\gamma\right)\frac{1}{3}-2\int_0^1 dx\,x(1-x)\ln\left(\frac{m^2-x(1-x)p^2}{2\pi\mu^2}\right)\right\} \tag{10-60}$$

発散部分のみを取り出すと，

$$\Pi_\infty^{\mu\nu(1\text{loop})}(p)=\frac{e^2}{3(2\pi)^2}(g^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu)\frac{1}{\varepsilon} \tag{10-61}$$

である．

(3)　3点頂点関数

3点頂点関数の 1 ループダイアグラムによる補正は，9 章式(9-53)の外線の伝搬関数を省いたもので与えられる．すなわち，

$$\Gamma^{\rho(3\text{点})(1\text{loop})}[p_1,p_2;p_3]=i\int\frac{id^4k}{(2\pi)^4}(ie\gamma^\mu)S_F(p_1-k)(ie\gamma^\rho)$$
$$\times S_F(p_1-k+p_3)(ie\gamma^\nu)D_{F\mu\nu}(k) \tag{10-62}$$

である．この計算も前の 2例と同様に遂行できるが，ここでは省略する．

10-3　くり込み理論

量子電磁力学はくり込み可能な理論であると言われているが，では一般にはどのような理論であればくり込み可能となるのかをまず考えてみる．Lagrangian の形から見かけ上の発散次数 d を頂点指標 δ で表わし，理論の分類を行なうことから始めよう．

1 粒子既約な Feynman ダイアグラム中の運動量積分(運動量次数は 4)の個数を l，ボソン内線(運動量次数は -2)の本数を b，フェルミオン内線(運動量次数は -1)の本数を f とすると，総運動量次数 d は

$$d=4l-2b-f \tag{10-63}$$

となる．この d を見かけ上の発散次数という．1 ループダイアグラムの場合には，この d はそのまま発散の次数となるが，ループが二つ以上のダイアグラムのときはそうはならない．そのときには，各部分ダイアグラムの見かけ上の発散次数を考慮に入れる必要がある．

さて，摂動論のところで述べたように，各内線伝搬関数ごとに運動量積分が存在するが，頂点ごとに運動量を保存するための δ 関数が含まれているので，これにより運

動量積分を減らすことができる．ただ，最後まで全外線運動量を保存するための δ 関数が一つ残ってしまい，この分は運動量積分を減らすのに用いることはできない．従って，頂点の個数を v とすると，運動量積分の個数 l に対して

$$l = b + f - (v - 1) \tag{10-64}$$

が成り立つ．これを式 (10-63) に代入してみると，

$$d = 2b + 3f - 4(v - 1) \tag{10-65}$$

となる．次に各頂点から n_f 本のフェルミオン線と n_b 本のボソン線が出ているとして，それらの端点数を数えてみると，フェルミオンの場合 $n_f v$, ボソンの場合 $n_b v$ である．一方，内線の端点数は 2, 外線の端点数は 1 であるから，フェルミオンの外線の本数を f_e, ボソンの外線の本数を b_e とすると，それぞれの粒子の端点数は $2f + f_e$, $2b + b_e$ となる．以上のことから，

$$\begin{aligned} n_f v &= 2f + f_e \\ n_b v &= 2b + b_e \end{aligned} \tag{10-66}$$

が得られる．これらを式 (10-65) に代入すると，

$$d = 4 - b_e - \frac{3}{2}f_e + (n_b + \frac{3}{2}n_f - 4)v \tag{10-67}$$

となる．

ここで，相互作用 Lagrangian $\mathcal{L}_{\rm int}[x]$ に対して定義される頂点指標 δ を導入する．$\mathcal{L}_{\rm int}[x]$ の中のフェルミオン場の個数を f_i (これは n_f に等しい), ボソン場の個数を b_i (これは n_b に等しい) とすると

$$\delta \equiv b_i + \frac{3}{2}f_i - 4 = \dim(\mathcal{L}_{\rm int}[x]) - 4 \tag{10-68}$$

である．但し，$\dim(\mathcal{L}_{\rm int}[x])$ は結合定数をはずしたときの $\mathcal{L}_{\rm int}[x]$ の質量次元である．これを式 (10-67) に代入すると，結局

$$d = 4 - b_e - \frac{3}{2}f_e + \delta v \tag{10-69}$$

が得られる．以下，δ の値による理論の分類を示す．

(1) $\delta < 0$

δv が負であるから，v が小さいダイアグラム，すなわち低次のダイアグラムのみが発散する．従って，発散するダイアグラムは有限個に限られる．このような理論を超くり込み可能理論という．例としては，ϕ^3–モデルが挙げられる．そこでは，

$$\mathcal{L}_{\rm int}[x] = -\frac{g}{3!}\phi^3(x)$$

より，

$$\delta = 3 + 0 - 4 = -1 < 0$$

となっている．

(2)　$\delta = 0$

$\delta v = 0$ であるから，頂点の個数はいくつあっても d の値は変わらない．つまり，どんなに高次のダイアグラムでも発散するので，その個数は無限個ということになる．それでは，このような理論は摂動論では取り扱えないかというとそうではなく，実は発散するダイアグラムの種類が限られるのである．発散次数 d が，$d \geq 0$ の場合にそのダイアグラムの頂点関数が発散するという条件を，式 (*10*−*69*) を用いて書き換えると，

$$b_e + \frac{3}{2}f_e \leq 4 \qquad (10-70)$$

となる．これから発散ダイアグラムが有限種類となるのである．このような頂点を一つ以上含み，他は (1) のタイプの頂点であるような理論，すなわち $\delta \leq 0$ であるような理論をくり込み可能理論という．その代表例としては量子電磁力学が挙げられる．確かに

$$\mathcal{L}_{\rm int}[x] = e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$$

より，

$$\delta = 1 + \frac{3}{2}\cdot 2 - 4 = 0$$

となっている．式 (*10*−*70*) より発散ダイアグラムの種類は，

①　$b_e = 0, f_e = 2$ の場合 (電子の自己エネルギー)

②　$b_e = 1, f_e = 2$ の場合 (3 点頂点関数)

③　$b_e = 2, f_e = 0$ の場合 (光子の自己エネルギー)

④　$b_e = 3, f_e = 0$ の場合

⑤　$b_e = 4, f_e = 0$ の場合

に限られることがわかる．しかし，④, ⑤については荷電共役変換不変性，及びゲージ不変性から発散が抑えられている．従って，量子電磁力学における発散ダイアグラムは，①, ②, ③の 3 種類しか存在しない．つまり，これら 3 種類のダイアグラムが

ら計算される発散積分の極 (無限大) をうまく処理できさえすれば，理論は摂動論による予言能力を持つことになるのである．

(3) $\delta > 0$

δv が正であるから，v が大きくなればなる程 d が大きくなる．これは摂動の次数の増加とともに発散の次数も上がることを意味する．$d \geq 0$ という発散の条件は，今の場合

$$b_e + \frac{3}{2} f_e \leq 4 + \delta v \tag{10-71}$$

となるので，b_e と f_e の組み合わせから考えられる発散ダイアグラムの種類数に上限が存在しない．従って，発散ダイアグラムは無限種類も存在するということになる．このような理論をくり込み不可能理論という．例としては重力相互作用の理論が挙げられる．重力理論の摂動展開は $\sqrt{\kappa}$ のべき展開として実行される．つまり，相互作用の結合定数に相当するものは今の場合 $\sqrt{\kappa}$ である．κ は Einstein の重力定数で，その質量次元は -2 であるから，結合定数は負の質量次元 -1 を持つということになる．従って，

$$\dim(\sqrt{\kappa}) + \dim(\mathcal{L}_{\rm int}[x]) = 4$$

より，

$$\dim(\mathcal{L}_{\rm int}[x]) = 5$$

となり，確かに

$$\delta = \dim(\mathcal{L}_{\rm int}[x]) - 4 = 1 > 0$$

となっている．

では，くり込み不可能な重力理論は破綻しているのかというと，そうではなくて，摂動論では有益な計算結果が得られないということである．従って，非摂動論的な手法を用いて量子論的な計算が実行できれば，理論は予言能力を有することになる．しかし，現在のところ重力の量子論においてこのような手法は確立されていない．

これまで，頂点指標 δ を用いた理論の分類を示してきたが，以下では量子電磁力学における具体的なくり込み手法を説明する．

まず，量子電磁力学の Lagrangian 密度として

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x] &\equiv \mathcal{L}_0[x] - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \mathcal{L}_{\rm int}[x] \\ &= \overline{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \end{aligned}\tag{10-72}$$

を考える．その形から明らかなように，9 章の式 (9-1) から外場の項を除いたものを改めて $\mathcal{L}[x]$ とした．ここで，くり込み定数 Z_1, Z_2, Z_3, δm, Z_ξ を導入する．そして，前に分離した発散積分の極をこの定数の中に埋め込んでしまうのである．このような操作をくり込みといい，実際の計算はくり込まれた量 (有限な量) を用いて行なわれ，その結果は有限にできるのである．これまでに用いられてきた物理量 (場，質量，結合定数等) とくり込まれた物理量との関係を以下の式で定義する．

$$\begin{aligned}&\psi(x) = Z_2^{1/2}\psi_r(x),\ A_\mu(x) = Z_3^{1/2}A_{r\mu}(x)\\&e = Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}e_r,\ m = m_r + \delta m\\&\xi = Z_3Z_\xi\xi_r\end{aligned} \tag{10-73}$$

くり込まれた量には添字 r をつけてある．さて，これらを用いると Lagrangian 密度の式 (10-72) は，

$$\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}_r[x] + \mathcal{L}_{\text{count.}}[x] \tag{10-74}$$

但し，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_r[x] \equiv{}& \overline{\psi}_r i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - m_r\overline{\psi}_r\psi_r - \frac{1}{4}F_{r\mu\nu}F_r^{\mu\nu}\\&-\frac{1}{2\xi_r}(\partial^\mu A_{r\mu})^2 + e_r\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_rA_{r\mu}\\\mathcal{L}_{\text{count.}}[x] \equiv{}& (Z_2-1)\overline{\psi}_r i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - (Z_2-1)m_r\overline{\psi}_r\psi_r\\&-Z_2\delta m\overline{\psi}_r\psi_r - (Z_3-1)\frac{1}{4}F_{r\mu\nu}F_r^{\mu\nu}\\&-\left(\frac{1}{Z_\xi}-1\right)\frac{1}{2\xi_r}(\partial^\mu A_{r\mu})^2 + (Z_1-1)e_r\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_rA_{r\mu}\end{aligned}$$

と書き換えられる．なぜならば，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_r[x] + \mathcal{L}_{\text{count.}}[x] ={}& Z_2\overline{\psi}_r i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - (m_r+\delta m)Z_2\overline{\psi}_r\psi_r - \frac{1}{4}Z_3F_{r\mu\nu}F_r^{\mu\nu}\\&-\frac{1}{2Z_\xi\xi_r}(\partial^\mu A_{r\mu})^2 + Z_1e_r\overline{\psi}_r\gamma^\mu\psi_rA_{r\mu}\\={}& \overline{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\end{aligned}$$

となるからである．$\mathcal{L}_{\text{count.}}[x]$ の各項は相殺項と呼ばれる．そして式 (10-74) はくり込み計算において極めて重要な意味を持っているのである．例えば，$\mathcal{L}_r[x]$ から電子の自己エネルギーを求めてみると，各物理量はくり込まれているので有限なのであるが，それでも結果には 1 ループであれば式 (10-47) のような極が含まれる．ところ

が，この極は $\mathcal{L}_{\text{count.}}[x]$ から計算される 2 点頂点関数の式と丁度うまく相殺するように Z_2 と δm を決めることができるのである．結果として，式 (10-74) の右辺から計算される電子の自己エネルギーは有限にできるのである．$\mathcal{L}_r$ と $\mathcal{L}_{\text{count.}}$ を加えたものが元の Lagrangian $\mathcal{L}$ に等しいのであるから，結局無限大は除去できたことになる．ここで大切なことは，全ての発散積分に対応する相殺項を $\mathcal{L}_{\text{count.}}$ が含んでいなければならないということである．量子電磁力学はまさにそのようになっているので，くり込み可能理論なのである．

では，電子の自己エネルギーと光子の自己エネルギーについて，具体的に極を除去するようにくり込み定数を求めてみよう．そのためには，ループダイアグラムから計算される頂点関数がちょうど $\hbar$ のべき展開になっていることを示しておく必要がある．

有効作用の定義に戻って，

$$
\begin{aligned}
\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0] &\equiv W[J,\eta,\overline{\eta}] - \int d^4x(J^\mu A_{0\mu} + \overline{\eta}\psi_0 + \overline{\psi}_0\eta) \\
&= i^{-1}\ln Z[J,\eta,\overline{\eta}] - i^{-1}\ln e^{i\int d^4x(J^\mu A_{0\mu}+\overline{\eta}\psi_0+\overline{\psi}_0\eta)} \\
&= i^{-1}\left[\ln\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A e^{i\int d^4x\{\mathcal{L}[x]+J^\mu A_\mu+\overline{\eta}\psi+\overline{\psi}\eta\}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. -\ln e^{i\int d^4x(J^\mu A_{0\mu}+\overline{\eta}\psi_0+\overline{\psi}_0\eta)}\right] \\
&= i^{-1}\ln\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A e^{i\int d^4x\{\mathcal{L}[x]+J^\mu(A_\mu-A_{0\mu})+\overline{\eta}(\psi-\psi_0)+(\overline{\psi}-\overline{\psi}_0)\eta\}}
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\hbar$ を復活させると，

$$
\begin{aligned}
&\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0] \\
&\quad = \frac{\hbar}{i}\ln\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A e^{\frac{i}{\hbar}\int d^4x\{\mathcal{L}[x]+J^\mu(A_\mu-A_{0\mu})+\overline{\eta}(\psi-\psi_0)+(\overline{\psi}-\overline{\psi}_0)\eta\}}
\end{aligned} \tag{10-75}
$$

である．e の肩の第一項 $\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathcal{L}[x]\right)$ の形から伝搬関数は $\hbar^1$ に比例し，頂点は $\hbar^{-1}$ に比例することがわかる．このことから，ダイアグラムが与えられたときにその頂点の数を v, 内線伝搬関数の数を $b+f$ とすると，計算される頂点関数は $\hbar^{(b+f)-v}$ に比例するという結果が得られる．一方，一般的にループの数は運動量積分の個数 l に等しく，l は式 (10-64) から

$$
l = (b+f) - v + 1
$$

であったから，結局頂点関数は $\hbar^{l-1}$ に比例することになる．$\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]$ にはすで

に全体にかかる $\hbar$ が含まれているので，l ループのダイアグラムは $\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]$ に対して $\hbar^l$ に比例した寄与をすることがわかる．すなわち，

$$l\text{ ループダイアグラムの寄与} \longleftrightarrow \hbar^l\text{に比例}$$

である．例えば，電子や光子の自己エネルギーの計算を実行した 1 ループ補正は，$\hbar$ に比例した寄与をする．

さて，Z_2 と δm を $\hbar$ のべきで展開する．

$$\begin{aligned} Z_2 &= 1 + Z_2^{(1)}\hbar + Z_2^{(2)}\hbar^2 + \cdots \\ Z_2\delta m &= 0 + \delta m^{(1)}\hbar + \delta m^{(2)}\hbar^2 + \cdots \end{aligned} \tag{10-76}$$

そうすると，$\mathcal{L}_{\text{count.}}[x]$ から計算される $\hbar$ の 1 次の電子の自己エネルギー $\Sigma^{(1)}_{\text{count.}}(p)$ は，伝搬関数の逆にくり込み定数をかけたもので与えられるので

$$\Sigma^{(1)}_{\text{count.}}(p) = Z_2^{(1)}(\not p - m_r) - \delta m^{(1)} \tag{10-77}$$

となる．すでに $\mathcal{L}_{\text{count.}}[x]$ の電子に関する項の係数 $Z_2 - 1$ 及び $Z_2\delta m$ は $\hbar$ の 1 次以上を含んでいるので，相互作用を考慮して得られるループダイアグラムからの寄与は $\hbar$ の 2 次以上になる．従って，この相互作用なしの摂動 0 次の項が，$\mathcal{L}_r[x]$ からの 1 ループダイアグラムに対応するのである．式 (10-46) において，その物理量をくり込まれた量に置き換えたものを $\Sigma_r^{(1\text{loop})}(p)$ とすると，これは $\mathcal{L}_r[x]$ から計算された $\hbar$ の 1 次の項になっている．これと式 (10-77) を加えたものが，現実の自己エネルギーの量子補正 (有限な量) を与えると考えるのである．

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1\text{loop})}(p) &= \Sigma_r^{(1\text{loop})}(p) + \Sigma^{(1)}_{\text{count.}}(p) \\ &= \Sigma_{r\infty}^{(1\text{loop})}(p) + \Sigma^{(1)}_{\text{count.}}(p) + (\text{有限部分}) \\ &= -\frac{e_r^2}{(4\pi)^2}\{\xi_r \not p - (4-(1-\xi_r))m_r\}\frac{1}{\varepsilon} \\ &\qquad + Z_2^{(1)}(\not p - m_r) - \delta m^{(1)} + (\text{有限部分}) \\ &= \left\{-\frac{e_r^2}{(4\pi)^2}\frac{\xi_r}{\varepsilon} + Z_2^{(1)}\right\}\not p + \frac{e_r^2}{(4\pi)^2}(4-(1-\xi_r))m_r\frac{1}{\varepsilon} \\ &\qquad - Z_2^{(1)}m_r - \delta m^{(1)} + (\text{有限部分}) \end{aligned} \tag{10-78}$$

より，

$$Z_2^{(1)} = \frac{e_r^2}{(4\pi)^2}\xi_r\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \delta m^{(1)} = \frac{e_r^2}{(4\pi)^2}3m_r\frac{1}{\varepsilon} \tag{10-79}$$

とおくと，$\Sigma^{(1\text{loop})}(p)$ が確かに有限となる．代わりにくり込み定数に極が埋め込まれているのである．こうして，電子の自己エネルギーの発散をくり込みによって除去す

ることができた．また，$\delta m^{(1)}$ が m_r に比例していることから，$m = m_r + \delta m \cong m_r + \frac{\hbar}{Z_2}\delta m^{(1)} = am_r$ とできる．これは，最初に与えられた Lagrangian に質量項がないときは，くり込んだ後でも質量は 0 のままであることを意味している．

光子の自己エネルギーについても全く同様にして示すことができる．

$$\begin{aligned} Z_3 &= 1 + Z_3^{(1)}\hbar + Z_3^{(2)}\hbar^2 + \cdots \\ Z_\xi &= 1 + Z_\xi^{(1)}\hbar + Z_\xi^{(2)}\hbar^2 + \cdots \end{aligned} \tag{10-80}$$

と展開すると，$\mathcal{L}_{\text{count.}}[x]$ から計算される $\hbar$ の 1 次の光子の自己エネルギー $\Pi^{\mu\nu(1)}_{\text{count.}}(p)$ は，

$$\Pi^{\mu\nu(1)}_{\text{count.}}(p) = -Z_3^{(1)}(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) + Z_\xi^{(1)}\frac{1}{\xi_r}p^\mu p^\nu \tag{10-81}$$

となる．従って，式(*10−61*)を用いて

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}(p) &= \Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}_r(p) + \Pi^{\mu\nu(1)}_{\text{count.}}(p) \\ &= \Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}_{r\infty}(p) + \Pi^{\mu\nu(1)}_{\text{count.}}(p) + (\text{有限部分}) \\ &= \frac{e_r^2}{3(2\pi)^2}(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu)\frac{1}{\varepsilon} \\ &\quad - Z_3^{(1)}(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) + Z_\xi^{(1)}\frac{1}{\xi_r}p^\mu p^\nu + (\text{有限部分}) \end{aligned} \tag{10-82}$$

となる．ここで，

$$Z_3^{(1)} = \frac{e_r^2}{3(2\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon}, \qquad Z_\xi^{(1)} = 0 \tag{10-83}$$

とおくと，$\Pi^{\mu\nu(1\text{loop})}(p)$ を有限にすることができる．第 2 式は $Z_\xi = 1$ を予想させるが，これは次節の Ward−高橋恒等式を用いて示すことができる．

最後に，3 点頂点関数の極は Z_1 を用いて除去することができるが，Ward−高橋恒等式から $Z_1 = Z_2$ が示されるので，ここでは述べない．

いずれにせよ，量子電磁力学の 3 種類の基本的な発散積分(電子の自己エネルギー，光子の自己エネルギー，3 点頂点関数)は，三つのくり込み定数 $Z_2, Z_3, \delta m$ を用いて有限にすることができるのである．

10 − 4　Ward−高橋恒等式

理論がある対称性をもっている場合，これを K 点 Green 関数，生成汎関数，有効作用，Feynman ダイアグラムなどの間の関係式に焼き直したものが，Ward−高橋恒等式と呼ばれているものである．ここでは量子電磁力学における一般的な Ward−高橋恒等式を導き，それからくり込み定数の間の関係式を得る．

量子電磁力学はゲージ対称性を有しているので，これが出発点となる．8 章の 8-1 節で示したように，無限小パラメータ $\alpha(x)$ によるゲージ変換

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \psi'(x) = \psi(x) - ie\alpha(x)\psi(x) \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \tag{10-84}$$

を行なっても，$\mathcal{L}[x]$ の中のゲージ固定項 $-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2$ 以外は不変であり，ゲージ固定項は $\alpha(x)$ の 1 次までを考慮すると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A'_\mu)^2 &= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu - \Box\alpha)^2 \\ &= -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \frac{1}{\xi}(\partial^\mu A_\mu)\cdot\Box\alpha \end{aligned} \tag{10-85}$$

と変換する．従って，

$$\mathcal{L}(A'_\mu, \overline{\psi}', \psi') = \mathcal{L}(A_\mu, \overline{\psi}, \psi) + \frac{1}{\xi}\Box\alpha\cdot\partial^\mu A_\mu \tag{10-86}$$

となる．同様にして，外場の項 ($\mathcal{L}_{\text{ex.}}$) は，

$$\mathcal{L}_{\text{ex.}}(A'_\mu, \overline{\psi}', \psi') = \mathcal{L}_{\text{ex.}}(A_\mu, \overline{\psi}, \psi) - \partial_\mu\alpha\cdot J^\mu - ie\alpha\overline{\eta}\psi + ie\alpha\overline{\psi}\eta \tag{10-87}$$

となるから，合わせて

$$\begin{aligned} &\int d^4x\{\mathcal{L}(A'_\mu, \overline{\psi}', \psi') + \mathcal{L}_{\text{ex.}}(A'_\mu, \overline{\psi}', \psi')\} \\ &= \int d^4x\{\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}_{\text{ex.}}[x]\} + \int d^4x\alpha\left\{\frac{1}{\xi}\Box\,(\partial^\mu A_\mu) + \partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\psi + ie\overline{\psi}\eta\right\} \end{aligned} \tag{10-88}$$

が示せる．これを用いると，K 点 Green 関数の生成汎関数 $Z[J, \eta, \overline{\eta}]$ は，

$$\begin{aligned} Z[J,\eta,\overline{\eta}] &= \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}(A_\mu, \overline{\psi}, \psi) + \mathcal{L}_{\text{ex.}}(A_\mu, \overline{\psi}, \psi)\} \\ &= \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}'\mathfrak{D}\psi'\mathfrak{D}A' \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}(A'_\mu, \overline{\psi}', \psi') + \mathcal{L}_{\text{ex.}}(A'_\mu, \overline{\psi}', \psi')\} \\ &= \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}_{\text{ex.}}[x]\} \\ &\qquad \times \exp i\int d^4x\alpha\left\{\frac{1}{\xi}\Box\,(\partial^\mu A_\mu) + \partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\psi + ie\overline{\psi}\eta\right\} \\ &= \frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}_{\text{ex.}}[x]\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A\left[i\int d^4x\alpha\left\{\frac{1}{\xi}\Box\left(\partial^\mu A_\mu\right)+\partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\psi + ie\overline{\psi}\eta\right\}\right]\\
&\qquad\qquad \times \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}[x]+\mathcal{L}_{\text{ex.}}[x]\}\\
&= Z[J,\eta,\overline{\eta}] + i\int d^4x\alpha(x)\frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A\\
&\qquad\qquad \cdot\left\{\frac{1}{\xi}\Box\left(\partial^\mu A_\mu\right)+\partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\psi + ie\overline{\psi}\eta\right\}\\
&\qquad\qquad \times \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}[x]+\mathcal{L}_{\text{ex.}}[x]\}
\end{aligned}
\tag{10-89}
$$

となる．但し，ゲージ変換を行なっても経路積分測度は不変であるという事実を利用した．式 (*10－89*) から直ちに

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\int \mathfrak{D}\overline{\psi}\mathfrak{D}\psi\mathfrak{D}A\left\{\frac{1}{\xi}\Box\left(\partial^\mu A_\mu\right)+\partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\psi + ie\overline{\psi}\eta\right\}\\
&\qquad\qquad \times \exp i\int d^4x\{\mathcal{L}[x]+\mathcal{L}_{\text{ex.}}[x]\}\\
&= \left\langle 0\left| T\left\{\frac{1}{\xi}\Box\left(\partial^\mu \widehat{A}_\mu\right)+\partial_\mu J^\mu - ie\overline{\eta}\widehat{\psi} + ie\widehat{\overline{\psi}}\eta\right\}\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left.\cdot \exp i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]\right| 0\right\rangle\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{10-90}
$$

が得られる．但し，$\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]\equiv J^\mu(x)\widehat{A}_\mu(x)+\overline{\eta}(x)\widehat{\psi}(x)+\widehat{\overline{\psi}}(x)\eta(x)$ とした．

これがゲージ不変性から導かれた Ward–高橋恒等式である．更に，これを書き換えてみよう．式 (*10－90*) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\xi}\Box\partial^\mu\left\langle 0\left|T\widehat{A}_\mu(x)e^{i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]}\right|0\right\rangle + \partial_\mu J^\mu\left\langle 0\left|Te^{i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]}\right|0\right\rangle\\
&-ie\overline{\eta}\left\langle 0\left|T\widehat{\psi}(x)e^{i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]}\right|0\right\rangle + ie\left\langle 0\left|T\widehat{\overline{\psi}}(x)e^{i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]}\right|0\right\rangle\eta\\
&=0
\end{aligned}
\tag{10-91}
$$

となるが，ここで 10–1 節で求めた関係式

$$
\frac{\left\langle 0\left|T\widehat{A}_\mu(x)e^{i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]}\right|0\right\rangle}{\left\langle 0\left|Te^{i\int d^4x\widehat{\mathcal{L}}_{\text{ex.}}[x]}\right|0\right\rangle} = \frac{\delta W[J,\eta,\overline{\eta}]}{\delta J^\mu} = A_{0\mu}(x)
$$

$$J^\mu(x) = -\frac{\delta\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta A_{0\mu}(x)}$$

等を用いると結局,

$$\frac{1}{\xi}\Box\partial^\mu A_{0\mu}(x) - \partial_\mu \frac{\delta\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta A_{0\mu}(x)}$$
$$-ie\frac{\delta\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta\psi_0(x)}\psi_0(x) - ie\overline{\psi}_0(x)\frac{\delta\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(x)} = 0 \qquad (10-92)$$

が得られる．式 (10−92) が場の演算子の真空期待値と有効作用に関する Ward–高橋恒等式であり，きわめて重要な関係式である．これの汎関数微分を計算することにより様々な関係式 (それらも Ward–高橋恒等式と呼ばれる) が導かれ，更にそれから Feynman ダイアグラム間に成り立つ種々の関係を示すこともできるが，ここでは Ward–高橋恒等式の応用の一つとして，くり込み定数の間に成り立つ関係式を求めることにする．

式 (10−92) の両辺を $A_{0\nu}(y)$ で微分した後，$A_{0\mu} = \overline{\psi}_0 = \psi_0 = 0$ とおくと

$$\frac{1}{\xi}\Box\partial^\nu\delta^4(x-y) - \partial_\mu\frac{\delta^2\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta A_{0\nu}(y)\delta A_{0\mu}(x)} = 0 \qquad (10-93)$$

が成り立つ．これにくり込み定数の定義式，式 (10−73) を代入すると

$$\frac{1}{Z_\xi\xi^r}\Box\partial^\nu\delta^4(x-y) - \partial_\mu\frac{\delta^2\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]}{\delta A^r_{0\nu}(y)\delta A^r_{0\mu}(x)} = 0 \qquad (10-94)$$

が得られる．下添字が並んでしまうので便宜上 r は上添字とした．さて，Lagrangian の基本的な関係式 (10−74) を思い起こしてみると，その右辺から計算される有限な有効作用 $\Gamma[A^r_0, \overline{\psi}^r_0, \psi^r_0]$ は当然左辺から計算される有効作用 $\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0]$ に等しいはずであるから,

$$\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0] = \Gamma[A^r_0, \overline{\psi}^r_0, \psi^r_0] \qquad (10-95)$$

が結論される．但し，左辺は正則化されているものとする．これを式 (10−94) に代入すると,

$$\frac{1}{Z_\xi\xi^r}\Box\partial^\nu\delta^4(x-y) - \partial_\mu\frac{\delta^2\Gamma[A^r_0, \overline{\psi}^r_0, \psi^r_0]}{\delta A^r_{0\nu}(y)\delta A^r_{0\mu}(x)} = 0 \qquad (10-96)$$

となる．

一方，くり込まれた場の量で記述された Lagrangian $\mathcal{L}_r[x]$ についても，ゲージ変換に対して $\mathcal{L}[x]$ と全く同じ関係式が成り立つので，式 (10−93) と同様の Ward–高橋恒等式

$$\frac{1}{\xi^r}\Box\partial^\nu\delta^4(x-y) - \partial_\mu\frac{\delta^2\Gamma[A^r_0, \overline{\psi}^r_0, \psi^r_0]}{\delta A^r_{0\nu}(y)\delta A^r_{0\mu}(x)} = 0 \qquad (10-97)$$

が導かれる．これと式 (10-96) との比較から結局，

$$Z_\xi = 1 \tag{10-98}$$

が言える．

次に，式 (10-92) の両辺を $\overline{\psi}_0(z)$, $\psi_0(y)$ で微分した後，$A_{0\mu} = \overline{\psi}_0 = \psi_0 = 0$ とおくと，

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\psi_0(y)\delta\overline{\psi}_0(z)\delta A_{0\mu}(x)} + ie\frac{\delta^2\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\overline{\psi}_0(z)\delta\psi_0(x)}\delta^4(x-y) + ie\delta^4(x-z)\frac{\delta^2\Gamma[A_0,\overline{\psi}_0,\psi_0]}{\delta\psi_0(y)\delta\overline{\psi}_0(x)} = 0 \tag{10-99}$$

が得られるので，式 (10-73) と式 (10-95) を代入すると，

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[A_0^r,\overline{\psi}_0^r,\psi_0^r]}{\delta\psi_0^r(y)\delta\overline{\psi}_0^r(z)\delta A_{0\mu}^r(x)} + iZ_1Z_2^{-1}e_r\frac{\delta^2\Gamma[A_0^r,\overline{\psi}_0^r,\psi_0^r]}{\delta\overline{\psi}_0^r(z)\delta\psi_0^r(x)}\delta^4(x-y) + iZ_1Z_2^{-1}e_r\frac{\delta^2\Gamma[A_0^r,\overline{\psi}_0^r,\psi_0^r]}{\delta\psi_0^r(y)\delta\overline{\psi}_0^r(x)}\delta^4(x-z) = 0 \tag{10-100}$$

となる．

一方，$\mathcal{L}_r[x]$ から導かれる Ward–高橋恒等式は

$$\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma[A_0^r,\overline{\psi}_0^r,\psi_0^r]}{\delta\psi_0^r(y)\delta\overline{\psi}_0^r(z)\delta A_{0\mu}^r(x)} + ie_r\frac{\delta^2\Gamma[A_0^r,\overline{\psi}_0^r,\psi_0^r]}{\delta\overline{\psi}_0^r(z)\delta\psi_0^r(x)}\delta^4(x-y) + ie_r\frac{\delta^2\Gamma[A_0^r,\overline{\psi}_0^r,\psi_0^r]}{\delta\psi_0^r(y)\delta\overline{\psi}_0^r(x)}\delta^4(x-z) = 0 \tag{10-101}$$

であるから，これらの式を比較すると

$$Z_1 = Z_2 \tag{10-102}$$

が言える．

式 (10-98) と式 (10-102) は前節の終わりに述べたことを裏付けている．

10-5 くり込み群方程式

次元正則化に伴ない，次元合わせのために導入されたパラメータ μ は，任意の値でよかった．このことは，種々の μ の値で指定されるくり込み処方が無限個存在していることを意味する．一つのくり込み処方から別のくり込み処方を得る操作をくり込み変換といい，これは群をなす．このような群をくり込み群という．そして，くり込み変換の無限小演算子を頂点関数に作用させたときに従う方程式が，くり込み群方程式

である．

まず始めに，式 (10−95) をもっと詳しく書いてみよう．

$$\Gamma[A_0, \overline{\psi}_0, \psi_0; e, m, \xi] = \Gamma[A_0^r, \overline{\psi}_0^r, \psi_0^r; e_r, m_r, \xi_r; \mu] \tag{10-103}$$

特に，くり込まれた量で記述された有効作用 Γ には μ が含まれている点に注意する．この式の両辺を 1 粒子既約な頂点関数で展開してみると，式 (10−16) を思い起こして，

$$\begin{aligned}
&\int d^4x_1 d^4x_2 \overline{\psi}_0(x_1)\Gamma^{(2)}[x_1, x_2; e, m, \xi]\psi_0(x_2) \\
&+\frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 A_{0\mu}(x_1)\Gamma^{(2)\mu\nu}[x_1, x_2; e, m, \xi]A_{0\nu}(x_2) \\
&+\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 A_{0\mu}(x_1)\overline{\psi}_0(x_2)\Gamma^{(3)\mu}[x_1, x_2, x_3; e, m, \xi]\psi_0(x_3) \\
&+\cdots \\
&=\int d^4x_1 d^4x_2 \overline{\psi}_0^r(x_1)\Gamma_r^{(2)}[x_1, x_2; e_r, m_r, \xi_r; \mu]\psi_0^r(x_2) \\
&\quad+\frac{1}{2}\int d^4x_1 d^4x_2 A_{0\mu}^r(x_1)\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[x_1, x_2; e_r, m_r, \xi_r; \mu]A_{0\nu}^r(x_2) \\
&\quad+\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 A_{0\mu}^r(x_1)\overline{\psi}_0^r(x_2)\Gamma_r^{(3)\mu}[x_1, x_2, x_3; e_r, m_r, \xi_r; \mu]\psi_0^r(x_3) \\
&\quad+\cdots
\end{aligned} \tag{10-104}$$

となることがわかる．従って，式 (10−73) を左辺に代入することにより，

$$\begin{aligned}
\Gamma_r^{(2)}[x_1, x_2; e_r, m_r, \xi_r; \mu] &= Z_2\Gamma^{(2)}[x_1, x_2; e, m, \xi] \\
\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[x_1, x_2; e_r, m_r, \xi_r; \mu] &= Z_3\Gamma^{(2)\mu\nu}[x_1, x_2; e, m, \xi] \\
\Gamma_r^{(3)\mu}[x_1, x_2, x_3; e_r, m_r, \xi_r; \mu] &= Z_2 Z_3^{1/2}\Gamma^{(3)\mu}[x_1, x_2, x_3; e, m, \xi]
\end{aligned} \tag{10-105}$$

等が得られる．各々のくり込まれた頂点関数が従うべき方程式がくり込み群方程式である．ここではその一つの例として，$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}$ に関する方程式を導き，その解を求めてみることにする．

式 (10−105) の第 2 式を Fourier 変換すると，

$$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] = Z_3\Gamma^{(2)\mu\nu}[p; e, m, \xi] \tag{10-106}$$

である．右辺の $\Gamma^{(2)\mu\nu}[p; e, m, \xi]$ は μ 依存がないので，μ で微分すると 0 となる．従って，

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] - \mu \frac{1}{Z_3} \frac{dZ_3}{d\mu} \Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] = 0 \tag{10-107}$$

となる．e_r, m_r, ξ_r は皆 μ の関数であるから，

$$\frac{d}{d\mu}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] = \left(\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{de_r}{d\mu}\frac{\partial}{\partial e_r} + \frac{dm_r}{d\mu}\frac{\partial}{\partial m_r} + \frac{d\xi_r}{d\mu}\frac{\partial}{\partial \xi_r} \right) \Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] \tag{10-108}$$

となることを利用すると，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \mu\frac{de_r}{d\mu}\frac{\partial}{\partial e_r} + \mu\frac{dm_r}{d\mu}\frac{\partial}{\partial m_r} + \mu\frac{d\xi_r}{d\mu}\frac{\partial}{\partial \xi_r} - \frac{\mu}{Z_3}\frac{dZ_3}{d\mu} \right) \cdot\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] = 0 \tag{10-109}$$

が得られる．ここで，

$$\beta \equiv \mu\frac{de_r}{d\mu},\ \gamma_m \equiv -\frac{\mu}{m_r}\frac{dm_r}{d\mu},\ \gamma_\xi \equiv \mu\frac{d\xi_r}{d\mu},\ \gamma_A \equiv \frac{1}{2}\frac{\mu}{Z_3}\frac{dZ_3}{d\mu} \tag{10-110}$$

と置くと，結局，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial e_r} - m_r\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_r} + \gamma_\xi\frac{\partial}{\partial \xi_r} - 2\gamma_A \right) \cdot\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] = 0 \tag{10-111}$$

となる．これが光子の 2 点頂点関数 $\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_r, m_r, \xi_r; \mu]$ に関するくり込み群方程式である．

この解を求めるために，まずパラメータ μ を次式で定義される $\mu(t)$ に置き換える．

$$\mu(t) = \mu e^t \quad すなわち \quad t = \ln\frac{\mu(t)}{\mu} \tag{10-112}$$

このとき，$\mu(t)\frac{d}{d\mu(t)} = \frac{d}{dt}$ が成立している．そして，このような置き換えによって，μ を含んでいた e_r, m_r, ξ_r は皆 t の関数となるが，それらを新たに $\overline{e}_r(t)$, $\overline{m}_r(t)$, $\overline{\xi}_r(t)$ と記し，次の方程式の解として定義する．

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\overline{e}_r(t) = \beta(\overline{e}_r(t), \overline{\xi}_r(t)), \quad \overline{e}_r(0) = e_r \\ &\frac{d}{dt}\overline{m}_r(t) = -\overline{m}_r(t)\{1 + \gamma_m(\overline{e}_r(t),\ \overline{\xi}_r(t))\}, \quad \overline{m}_r(0) = m_r \\ &\frac{d}{dt}\overline{\xi}_r(t) = \gamma_\xi(\overline{e}_r(t), \overline{\xi}_r(t)), \quad \overline{\xi}_r(0) = \xi_r \end{aligned} \tag{10-113}$$

こうすると，式 (10−111) の解は，

$$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;e_r,m_r,\xi_r;\mu] = e^{-2\int_0^t dt'\gamma_A(t')}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;\bar{e}_r(t),e^t\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);e^t\mu] \tag{10-114}$$

となることが示される．この式が式 (10−111) を満たしていることは，次のようにして確かめることができる．まず，

$$F(t) = e^{-2\int_0^t dt'\gamma_A(t')}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]$$
$$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t] \equiv \Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;\bar{e}_r(t),e^t\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);e^t\mu] \tag{10-115}$$

とおくと，式 (10−114) は任意の t に対して $F(t)=F(0)$ が成り立っていることを示している．従って，これから

$$\left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{10-116}$$

が言える．ところがこれはまさに式 (10−111) そのものなのである．なぜならば，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dF(t)}{dt}\right|_{t=0} &= -2\,\gamma_A(t)\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]\Big|_{t=0} + \left.\frac{d\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]}{dt}\right|_{t=0} \\
&= -2\gamma_A\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[0] + \left.\frac{d\bar{e}_r(t)}{dt}\,\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]}{\partial\bar{e}_r(t)}\right|_{t=0} \\
&\quad + \left.\frac{d(e^t\overline{m}_r(t))}{dt}\,\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]}{\partial(e^t\overline{m}_r(t))}\right|_{t=0} \\
&\quad + \left.\frac{d\bar{\xi}_r(t)}{dt}\,\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]}{\partial\bar{\xi}_r(t)}\right|_{t=0} + \left.\frac{d(e^t\mu)}{dt}\,\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[t]}{\partial(e^t\mu)}\right|_{t=0} \\
&= -2\gamma_A\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[0] + \beta\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[0]}{\partial e_r} + \{m_r - m_r(1+\gamma_m)\}\,\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[0]}{\partial m_r} \\
&\quad + \gamma_\xi\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[0]}{\partial\xi_r} + \mu\frac{\partial\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[0]}{\partial\mu} \\
&= \left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial e_r} - m_r\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_r} + \gamma_\xi\frac{\partial}{\partial\xi_r} - 2\gamma_A\right) \\
&\qquad \cdot\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;e_r,m_r,\xi_r;\mu]
\end{aligned} \tag{10-117}$$

となっているからである．

さて，有効作用 Γ の質量次元は 0 であるから，電磁場 A_μ の質量次元が 1 であることを考慮すると，式 (10−16) から $\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[x_1,x_2]$ の次元は $[M]^6$ であることが

わかる．更にそのまま Fourier 変換したものは $[M]^{-2}$ となるが，$[M]^{-4}$ の次元をもつ $\delta^4(p_1+p_2)$ をはずして定義されたものが $\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p]$ であるから，$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p]$ は結局 $[M]^2$ となる．このことから，$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;\bar{e}_r(t),\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);\mu]$ の中の質量次元 1 をもつ p, $\overline{m}_r(t)$, μ, を e^t 倍すれば，全体に $(e^t)^2$ がかかることになる．よって，

$$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[e^tp;\bar{e}_r(t),e^t\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);e^t\mu]=e^{2t}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;\bar{e}_r(t),\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);\mu] \tag{10-118}$$

となる．これを式(10-114)に代入すると，

$$\begin{aligned}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}&[e^tp;e_r,m_r,\xi_r;\mu]\\&=e^{-2\int_0^t dt'\gamma_A(t')}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[e^tp;\bar{e}_r(t),e^t\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);e^t\mu]\\&=e^{2\{1-t^{-1}\int_0^t dt'\gamma_A(t')\}t}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p;\bar{e}_r(t),\overline{m}_r(t),\bar{\xi}_r(t);\mu]\end{aligned} \tag{10-119}$$

が得られる．この式は大変重要な情報を含んでいる．それは，エネルギースケールを $p\longrightarrow e^tp$ と変えたときの $\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p]$ の振舞いを表わしているからである．また γ_A は光子の異常次元と呼ばれている．なぜならば，式(10-119)右辺の係数は，電磁場の次元が相互作用によって，

$$1\longrightarrow 1-t^{-1}\int_0^t dt'\gamma_A(t')$$

にずれたことを意味しているからである．

次に，エネルギーを増加させたときの結合定数 $\bar{e}_r(t)$, 及び $\Gamma_r^{(2)\mu\nu}$ の振舞いを調べてみる．式(10-113)で定義された β 関数は，前節で述べたくり込み処方ではゲージ固定のパラメータ ξ_r に依存せず(ゲージ固定非依存性)，更に現在では，微細構造定数 α による摂動展開の 5 次までが計算されている[1]．ここでの β の定義に従えば，それは e_r の 9 次まで計算されていることを意味する．具体形を示すと図10-3のようになっている．

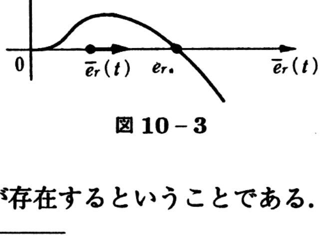


図 10-3

特徴は，β 関数に零点 e_{r_0} が存在するということである．最初，$\bar{e}_r(t)$ が 0 と e_{r_0} の

1) 江沢洋他：「くり込み群の方法」(岩波講座現代の物理学)，岩波書店(1994)，167ページ．

間にあったとすると，その領域では β の値が正であるから，式 (10-113) より $\overline{e}_r(t)$ は t と共に単調に増加していくことがわかる．更に t が増加し，$\overline{e}_r(t)$ が e_{r_0} に近づくに従って β が小さくなり，$\overline{e}_r(t)$ の増加も頭打ちとなる．結局，$t \longrightarrow \infty$ において漸く $\overline{e}_r(t)$ は e_{r_0} に達するのである．つまり，量子電磁力学における唯一の結合定数である $\overline{e}_r(t)$ はエネルギーの増加と共に大きくなっていき，ついには e_{r_0} に達するのである．このような β 関数の零点 e_{r_0} を紫外固定点という．一方，漸近的自由性を有する非可換ゲージ理論ではこの逆であり，結合定数はエネルギーの増加と共に小さくなっていく．実際，$SU(3)$ 非可換ゲージ理論では，β 関数が横軸に対してちょうど図 10–3 の逆の形になっており，0 と零点の間では $\beta < 0$ となっているのである．

$\Gamma_r^{(2)\mu\nu}$ は $t \longrightarrow \infty$ では以下のようになる．まず，

$$
\begin{aligned}
e^{-\int_0^t dt'\gamma_m(t')} &= e^{-\int_0^\infty dt'\gamma_m(t')}\cdot e^{\int_t^\infty dt'\gamma_m(t')} \\
&\cong e^{-\int_0^\infty dt'\gamma_m(t')}\cdot e^{\gamma_m^\infty \int_0^\infty dt' - \gamma_m^\infty \int_0^t dt'} \\
&= e^{\int_0^\infty dt'\{\gamma_m^\infty - \gamma_m(t')\}}\cdot e^{-\gamma_m^\infty t} \\
&= C_m e^{-\gamma_m^\infty t} \qquad (10-120)
\end{aligned}
$$

と書けることに注意する．但し，

$$
\begin{aligned}
\gamma_m^\infty &\equiv \lim_{t\to\infty}\gamma_m(t) \\
C_m &\equiv e^{\int_0^\infty dt'\{\gamma_m^\infty - \gamma_m(t')\}}
\end{aligned} \qquad (10-121)
$$

とした．これを用いると，式 (10-113) より

$$
\begin{aligned}
\overline{m}_r(t) = m_r e^{-\int_0^t dt'\{1+\gamma_m(t')\}} &= m_r e^{-t} e^{-\int_0^t dt'\gamma_m(t')} \\
\cong C_m m_r e^{-(1+\gamma_m^\infty)t} & \qquad (10-122)
\end{aligned}
$$

が得られる．ここで，$\gamma_m^\infty > -1$ とすると，

$$
\lim_{t\to\infty}\overline{m}_r(t) = 0 \qquad (10-123)
$$

となる．また，式 (10-120) と同様にして，

$$
e^{-\int_0^t dt'\gamma_A(t')} \cong C_A e^{-\gamma_A^\infty t}, \quad C_A \equiv e^{\int_0^\infty dt'\{\gamma_A^\infty - \gamma_A(t')\}} \qquad (10-124)
$$

とできるので，これらより式 (10-119) は $t \longrightarrow \infty$ において，

$$
\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[e^t p; e_r, m_r, \xi_r; \mu] \cong C_A^2 e^{2(1-\gamma_A^\infty)t}\Gamma_r^{(2)\mu\nu}[p; e_{r_0}, m_r = 0, \xi_r; \mu] \qquad (10-125)
$$

となることがわかる．これは，光子の次元が $1 \longrightarrow 1-\gamma_A^\infty$ にずれること，そして頂点

関数は，$e_{r_0}, m_r = 0$ におけるものを考えれば，それから導かれることを示している．

以上のように，くり込み群方程式は大変多くの情報を含んでいるのである．

演習問題

1. $b_e = 3$, $f_e = 0$ のダイアグラムは荷電共役変換不変性から禁じられていることを示せ．但し，荷電共役変換(粒子 $\longleftrightarrow$ 反粒子の変換)は次のように定義される．

$$C\psi C^{-1} = \psi^C = C(\overline{\psi})^t = C\gamma^0\psi^*$$

$$CA_\mu C^{-1} = A_\mu^C = -A_\mu$$

ここで，荷電共役行列 C は

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = -C^{-1} = -C^\dagger$$

で定義され，

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^t$$

という性質を有している．

2. $-(g^{\mu\nu}p^2 - p^\mu p^\nu) - \frac{1}{\xi}p^\mu p^\nu$ が光子の伝搬関数 $D_{F\mu\nu}(p)$ の逆になっていることを示せ．

3. Ward–高橋恒等式(*10*−*92*)から，$b_e = 4$, $f_e = 0$ のダイアグラムの 4 点頂点関数 $\Gamma^{(4)\mu\nu\rho\sigma}$ の満たすべき式を求め，それからこのダイアグラムは $d < 0$ となり，発散しないことを示せ．

4. $\Gamma_r^{(3)\mu}$ に関するくり込み群方程式を導き，その解を求めよ．

付　　録

A－1　状態遷移行列

$A(t)$ を時間に依存する N 次正方行列，I_N を N 次単位行列として，N 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{x}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \qquad (A-1)$$

を考えよう．$\boldsymbol{x}$ を N 自由度系の状態ベクトルとすれば，上式は状態の時間発展を記述することになる．$\boldsymbol{x}(t)$ が定義されるのは t_0 以降だけとは限らない点に注意しよう．$A(t)$ が t_0 を含む区間 (t_I, t_F) で定義されていれば，この区間上で $d\boldsymbol{x}/dt = A\boldsymbol{x}$ を満足し，$t = t_0$ において $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ を満足する $\boldsymbol{x}(t)$ が存在し，一意的に決まる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I_N \qquad (A-2)$$

を満足する N 次正方行列 $\Phi(t, t_0)$ を導入すれば[1]，式 $(A-1)$ の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}(t_0) = \Phi(t, t_0)\boldsymbol{x}_0 \qquad (A-3)$$

として与えられる．$\Phi(t, t_0)$ は時刻 t_0 における状態 $\boldsymbol{x}_0$ を時刻 t における状態 $\boldsymbol{x}(t)$ に遷移させる作用を持つことから状態遷移行列と呼ばれる．

---

1)　係数行列 A が時間に依存しなければ

$$\Phi(t, t_0) = \exp[A(t - t_0)] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[A(t - t_0)]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)}{n!} A^n$$

である．実際，$\Phi(t_0, t_0) = I_N$ は明らかであり，

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^{n-1}}{n!} A^n = A\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A\Phi(t, t_0)$$

が成立する．

さて，微分方程式 $(A-2)$ が積分方程式

$$\Phi(t,t_0)=\boldsymbol{I}_N+\int_{t_0}^{t}d\tau A(\tau)\Phi(\tau,t_0) \qquad (A-4)$$

と等価である点に注意しよう．つまり，Φ が式 $(A-2)$ の解ならば式 $(A-4)$ を満足し，逆に式 $(A-4)$ の解は式 $(A-2)$ を満足するのである．それゆえ，ここでは式 $(A-4)$ の解法を中心に議論を進めることにする．N 次正方行列 $\Phi_0(t,t_0)$ を勝手に選んで

$$\Phi_1(t,t_0)\equiv\boldsymbol{I}_N+\int_{t_0}^{t}d\tau A(\tau)\Phi_0(\tau,t_0)$$

とすれば Φ_0 が積分方程式の解 Φ に等しくない限り $\Phi_1\neq\Phi_0$ であるが，Φ_1 は Φ_0 よりも解に近いことが期待される．この Φ_1 を上式の Φ_0 の代りに使って Φ_2 を計算し，同様にして Φ_3, Φ_4, ... と近似を進めれば Φ_∞ は真の解 Φ に一致すると期待される．では，この予想を確かめてみよう．Φ_0 としては何を選んでも良いはずだが，ここでは $\Phi_0(t,t_0)\equiv\boldsymbol{I}_N$ として漸化式

$$\Phi_k(t,t_0)\equiv\boldsymbol{I}_N+\int_{t_0}^{t}d\tau A(\tau)\Phi_{k-1}(\tau,t_0),\quad k=1,2,3,\cdots \qquad (A-5)$$

を考える．すると，$k=1$ から出発して順次に代入を繰り返すことにより

$$\begin{aligned}\Phi_k(t,t_0)=\boldsymbol{I}_N&+\int_{t_0}^{t}d\tau_1 A(\tau_1)+\int_{t_0}^{t}d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2 A(\tau_1)A(\tau_2)+\cdots\\&+\int_{t_0}^{t}d\tau_1\int_{t_0}^{\tau_1}d\tau_2\cdots\int_{t_0}^{\tau_{k-1}}d\tau_k A(\tau_1)A(\tau_2)\cdots A(\tau_k)\end{aligned} \qquad (A-6)$$

が結論される．右辺の多重積分を扱いやすい形に変形するため時間順序演算子 T を導入する．例えば T が二つの行列の積 $A(\tau_1)A(\tau_2)$ に作用すれば

$$T[A(\tau_1)A(\tau_2)]=\begin{cases}A(\tau_1)A(\tau_2) & \tau_1\geq\tau_2\\A(\tau_2)A(\tau_1) & \tau_1\leq\tau_2\end{cases}$$

となる．つまり，T は行列 $A(\tau_1)$, $A(\tau_2)$ を時刻が遅い順に左から右に並べる作用を持つとするのである．任意個数の行列の積に作用する場合も同様であり，

$$\tau_{\sigma(1)}\geq\tau_{\sigma(2)}\geq\cdots\geq\tau_{\sigma(k)} \qquad (A-7)$$

が成立するように選んだ $(1,2,\cdots,k)$ 上の置換 σ を使って

$$T[A(\tau_1)A(\tau_2)\cdots A(\tau_k)]=A(\tau_{\sigma(1)})A(\tau_{\sigma(2)})\cdots A(\tau_{\sigma(k)}) \qquad (A-8)$$

と書ける．$\tau_1\tau_2$ 平面上の $t\geq\tau_1$, $\tau_2\geq t_0$ で指定される正方形領域が二つの三角形領

域 $t \geq \tau_1 \geq \tau_2 \geq t_0$ 及び $t \geq \tau_2 \geq \tau_1 \geq t_0$ の合併として表わされることから

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 d\tau_2 T[A(\tau_1)A(\tau_2)] \\
&\quad = \int_{t\geq\tau_1\geq\tau_2\geq t_0} d\tau_1 d\tau_2 T[A(\tau_1)A(\tau_2)] \\
&\qquad\qquad + \int_{t\geq\tau_2\geq\tau_1\geq t_0} d\tau_1 d\tau_2 T[A(\tau_1)A(\tau_2)] \\
&\quad = \int_{t\geq\tau_1\geq\tau_2\geq t_0} d\tau_1 d\tau_2 A(\tau_1)A(\tau_2) \\
&\qquad\qquad + \int_{t\geq\tau_2\geq\tau_1\geq t_0} d\tau_1 d\tau_2 A(\tau_2)A(\tau_1)
\end{aligned}$$

と書けるが，積分変数 τ_1 を τ_2 で書き換え，τ_2 を τ_1 で書き換えても積分値は変わらないので

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 d\tau_2 T[A(\tau_1)A(\tau_2)] &= 2\int_{t\geq\tau_1\geq\tau_2\geq t_0} d\tau_1 d\tau_2 A(\tau_1)A(\tau_2) \\
&= 2\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 A(\tau_1)A(\tau_2)
\end{aligned}$$

が結論される．右辺に登場する二重積分は式 $(A-6)$ の第 3 項である点に注意しよう．一般の k 重積分でも同様であって

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k T[A(\tau_1)A(\tau_2)\cdots A(\tau_k)] \\
&\quad = k!\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} d\tau_k A(\tau_1)A(\tau_2)\cdots A(\tau_k)
\end{aligned} \tag{A-9}$$

が結論され，これを式 $(A-6)$ に代入すれば次式を得る．

$$\begin{aligned}
\Phi_k(t,t_0) &= I_N + \frac{1}{1!}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 T[A(\tau_1)] \\
&\quad + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} d\tau_1 d\tau_2 T[A(\tau_1)A(\tau_2)] + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{k!}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\cdots\int_{t_0}^{t} d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_k T[A(\tau_1)A(\tau_2)\cdots A(\tau_k)]
\end{aligned} \tag{A-10}$$

$\{\Phi_k(t,t_0)\}_{k=0,1,2,\ldots}$ の収束性を調べるため適当な行列ノルム $||\cdot||$ を選んで区間 $(t_0,t$ における $||A(\tau)||$ の最大値を G とする．このとき任意の正整数 k,l に対して

$$||\Phi_{k+l}(t,t_0) - \Phi_k(t,t_0)||$$

$$= \left\| \sum_{m=k+1}^{k+l} \frac{1}{m!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \cdots d\tau_m T[A(\tau_1) \cdots A(\tau_m)] \right\|$$

$$\leq \sum_{m=k+1}^{k+l} \frac{1}{m!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \cdots d\tau_m \| T[A(\tau_1) \cdots A(\tau_m)] \|$$

$$\leq \sum_{m=k+1}^{k+l} \frac{1}{m!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \cdots d\tau_m G^m = \sum_{m=k+1}^{k+l} \frac{(t-t_0)^m}{m!} G^m$$

が成立するが，$\exp[G(t-t_0)]$ のべき級数展開は絶対収束するから $\{\Phi_k(t,t_0)\}_{k=1,2,\cdots}$ は Cauchy 列であり，$\lim_{k\to\infty}\Phi_k(t,t_0)$ もまた収束する[1]．収束先である $\Phi_\infty(t,t_0)$ は当然ながら積分方程式 $(A-4)$ を満足し，従って微分方程式 $(A-2)$ の解 $\Phi(t,t_0)$ である．それゆえ，式 $(A-10)$ によって

$$\Phi(t,t_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{t_0}^{t} \cdots \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \cdots d\tau_k T[A(\tau_1) \cdots A(\tau_k)] \qquad (A-11)$$

を得るが，これを形式的に

$$\Phi(t,t_0) = T[\exp\{\int_{t_0}^{t} d\tau A(\tau)\}] \qquad (A-12)$$

と記すことにする．指数関数を展開し，積分を実行する前に時間順序演算子 T を作用させれば式 $(A-11)$ が再現されるからである．

さて，式 $(A-1)$ の解 $\boldsymbol{x}(t)$ の時刻 t_1 における値を $\boldsymbol{x}_1 \equiv \boldsymbol{x}(t_1)$ とすれば

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t,t_1)\boldsymbol{x}_1 = \Phi(t,t_1)\boldsymbol{x}(t_1) = \Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0)\boldsymbol{x}_0 = \Phi(t,t_0)\boldsymbol{x}_0$$

であり，これが任意の $\boldsymbol{x}_0$ に関して成立することから

$$\Phi(t,t_0) = \Phi(t,t_1)\Phi(t_1,t_0) \qquad (A-13)$$

が結論される．特に $t \longrightarrow t_0$, $t_1 \longrightarrow t$ とすれば

$$\boldsymbol{I}_N = \Phi(t_0,t_0) = \Phi(t_0,t)\Phi(t,t_0) \qquad (A-14)$$

を得るから，状態遷移行列は常に可逆であり，

$$[\Phi(t,t_0)]^{-1} = \Phi(t_0,t) \qquad (A-15)$$

が成立する．また，式 $(A-14)$ の両辺を t で微分すれば

$$0 = \frac{\partial\Phi(t_0,t)}{\partial t}\Phi(t,t_0) + \Phi(t_0,t)\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t}$$

---

1)　有限次の行列の集合は任意に選んだ行列ノルムに関して完備であり，Cauchy 列は収束する．

$$= \frac{\partial \Phi(t_0,t)}{\partial t}\Phi(t,t_0) + \Phi(t_0,t)A(t)\Phi(t,t_0)$$
$$= \left\{\frac{\partial \Phi(t_0,t)}{\partial t} + \Phi(t_0,t)A(t)\right\}\Phi(t,t_0)$$

を得るが，$\Phi(t,t_0)$ が可逆であることから

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t_0,t) = -\Phi(t_0,t)A(t) \tag{A-16}$$

が結論される．

最後に式 $(A-12)$ に関する注意点を指摘しておく．つまり，

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{t} d\tau A(\tau)\right\} = \exp\left\{-\int_{t}^{t_0} d\tau A(\tau)\right\} \tag{A-17}$$

は常に成立するが，特別な場合を別にすれば

$$T\left[\exp\left\{\int_{t_0}^{t} d\tau A(\tau)\right\}\right] \neq T\left[\exp\left\{-\int_{t}^{t_0} d\tau A(\tau)\right\}\right] \tag{A-18}$$

となる点である．これを示そう．まず，式 $(A-2)$ の $A(t)$ を $-A(t)$ で置き換えた方程式の解を $\Psi(t,t_0)$ とすれば

$$\Psi(t,t_0) = T\left[\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} d\tau A(\tau)\right\}\right] \longrightarrow \Psi(t_0,t) = T\left[\exp\left\{-\int_{t}^{t_0} d\tau A(\tau)\right\}\right]$$

である．それゆえ，仮に式 $(A-18)$ で等号が成立したとすれば $\Phi(t,t_0) = \Psi(t_0,t)$ である．ところが，式 $(A-16)$ に対応して

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t_0,t) = \Psi(t_0,t)A(t)$$

が成立するため，$\Phi(t,t_0) = \Psi(t_0,t)$ だったとすれば $\Phi(t,t_0)$ は

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,t_0) = \Phi(t,t_0)A(t)$$

を満足する．一方，$\Phi(t,t_0)$ は式 $(A-2)$ も満足するから

$$\Phi(t,t_0)A(t) = A(t)\Phi(t,t_0)$$

でなければならない．従って，全ての時間 t に於て $A(t)$ と $\Phi(t,t_0)$ が可換でない限り式 $(A-18)$ が結論されることになる．

A−2　伝搬関数による境界値問題の解の表現

ここでは式 $(3-31)$ で指定される境界値問題の解 q_c が式 $(3-32)$ で定義される伝搬関数を使って式 $(3-33)$ のように表現されることを証明する．まず，

$$q_d(t) \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt' G(t,t')J(t'), \quad q_b(t) \equiv q_F G_t(t_F,t) - q_I G_t(t_I,t) \tag{A-19}$$

で定義される q_d, q_b が

$$\begin{cases} \ddot{q}_d + \omega^2 q_d = J \\ q_d(t_I) = 0, \quad q_d(t_F) = 0 \end{cases} \tag{A-20}$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_b + \omega^2 q_b = 0 \\ q_b(t_I) = q_I, \quad q_b(t_F) = q_F \end{cases} \tag{A-21}$$

を満足することを示そう．式 (A－20), (A－21) が成立すれば $q_d + q_b$ は式 (3－31) を満足するため q_c に一致し，これは式 (3－33) の成立を意味するからである．

さて，式 (A－20) が成立することは q_d の定義と式 (3－32) から

$$\ddot{q}_d(t) + \omega^2 q_d(t) \equiv \int_{t_I}^{t_F} dt' \{(\partial_t^2 + \omega^2)G(t,t')\}J(t')$$
$$= \int_{t_I}^{t_F} dt' \delta(t-t')J(t') = J(t)$$

$$q_d(t_I) = \int_{t_I}^{t_F} dt' G(t_I,t')J(t') = 0, \; q_d(t_F) = \int_{t_I}^{t_F} dt' G(t_F,t')J(t') = 0$$

として示されるが，式 (A－21) を示すには伝搬関数の性質を議論する必要がある．まず，恒等式

$$\partial_t\{G(t,t'')\partial_t G(t,t')\} - \partial_t\{G(t,t')\partial_t G(t,t'')\}$$
$$= G(t,t'')\partial_t^2 G(t,t') - G(t,t')\partial_t^2 G(t,t'')$$

の両辺を t に関して区間 $[t_I, t_F]$ で積分して式 (3－32) を代入すれば

$$0 = \{G(t,t'')\partial_t G(t,t') - G(t,t')\partial_t G(t,t'')\}|_{t_I}^{t_F}$$
$$= \int_{t_I}^{t_F} dt [G(t,t'')\{\delta(t-t') - \omega^2 G(t,t')\}$$
$$- G(t,t')\{\delta(t-t'') - \omega^2 G(t-t'')\}]$$
$$= G(t',t'') - G(t'',t')$$

を得る．すなわち

$$G(t,t') = G(t',t) \tag{A-22}$$

が成立し，伝搬関数は対称である．更に式 (A－22) の両辺を t で微分すれば

$$G_t(t,t') = G_{:t}(t',t) \tag{A-23}$$

を得る．ただし $G(t,t')$ の第一変数による偏導関数を $G_t(t,t')$，第二変数による偏導関数を $G_{:t}(t,t')$ で表している．式 (A－23) を利用すれば q_b は

$$q_b(t) \equiv q_F G_t(t_F,t) - q_I G_t(t_I,t) = q_F G_{:t}(t,t_F) - q_I G_{:t}(t,t_I) \qquad (A-24)$$

と表現できる．今度は式 (3－32) の第 2 式を t' で微分してみよう．$G(t,t')$ は $t=t'$ では微分できないが，それ以外では

$$\left.\begin{aligned} G_{:t}(t_I,t') &= 0 \qquad (t' \neq t_I) \\ G_{:t}(t_F,t') &= 0 \qquad (t' \neq t_F) \end{aligned}\right\} \qquad (A-25)$$

が成立し，特に

$$G_{:t}(t_I,t_F) = 0, \quad G_{:t}(t_F,t_I) = 0 \qquad (A-26)$$

が結論される．では，$t,\, t' \to t_I$ あるいは $t,\, t' \to t_F$ とした場合の $G_{:t}(t,t')$ の振る舞いを調べてみよう．式 (3－32) の第 1 式の両辺を t' で微分すれば

$$(\partial_t^2 + \omega^2) G_{:t}(t,t') = -\delta'(t-t') \qquad (A-27)$$

を得るが，$t=t'$ における右辺$-\delta'(t-t')$ の特異性とバランスするのは左辺第 1 項である点に注意しよう．仮に $G_{:t}(t,t')$ が $-\delta'(t-t')$ の特異性を分担しているとすればその導関数 $\partial_t^2 G_{:t}(t,t')$ は更に高次の特異性を持つことになるからである．それゆえ，$f(t,t')$ を通常の関数 (デルタ関数やその導関数を含まない関数) として

$$\partial_t G_{:t}(t,t') = -\delta(t-t') + f(t,t') \qquad (A-28)$$

と表現できることになる．そこで，t' を含む微小区間 $[t'-\varepsilon_1, t'+\varepsilon_2]$ で上式両辺を t に関して積分すれば

$$G_{:t}(t'+\varepsilon_2,t') - G_{:t}(t'-\varepsilon_1,t') = -1 + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \qquad (A-29)$$

を得る $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0)$．特に $t' = t_I + \varepsilon_1$ の場合には式 (A－25) によって

$$\begin{aligned} &G_{:t}(t_I+\varepsilon_1+\varepsilon_2, t_I+\varepsilon_1) - G_{:t}(t_I, t_I+\varepsilon_1) \\ &\qquad = G_{:t}(t_I+\varepsilon_1+\varepsilon_2, t_I+\varepsilon_1) = -1 + O(\varepsilon_1) + O(\varepsilon_2) \end{aligned}$$

が成立するので，

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0}\{\lim_{\varepsilon_1\to 0} G_{:t}(t_I+\varepsilon_1+\varepsilon_2, t_I+\varepsilon_1)\} = -1 \qquad (A-30)$$

が結論される．同様に，式 (A－26) で $t' = t_F - \varepsilon_2$ とすることにより

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\{\lim_{\varepsilon_2\to 0} G_{:t}(t_F-\varepsilon_2-\varepsilon_1, t_F-\varepsilon_2)\} = 1 \qquad (A-31)$$

が成立する．式 $(A-24)$, $(A-26)$, $(A-30)$, $(A-31)$ から

$$\begin{aligned}
q_b(t_I) &= q_F G_{:t}(t_I, t_F) - q_I \lim_{\varepsilon_2\to 0} G_{:t}(t_I+\varepsilon_2, t_I) \\
&= -q_I \lim_{\varepsilon_2\to 0}\{\lim_{\varepsilon_1\to 0} G_{:t}(t_I+\varepsilon_1+\varepsilon_2, t_I+\varepsilon_1)\} \\
&= (-q_I)(-1) = q_I \\
q_b(t_F) &= q_F \lim_{\varepsilon_1\to 0} G_{:t}(t_F-\varepsilon_1, t_F) - q_I G_{:t}(t_F, t_I) \\
&= q_F \lim_{\varepsilon_1\to 0} G_{:t}(t_F-\varepsilon_1, t_F) \\
&= q_F \lim_{\varepsilon_1\to 0}\{\lim_{\varepsilon_2\to 0} G_{:t}(t_F-\varepsilon_2-\varepsilon_1, t_F-\varepsilon_2)\} = q_F\cdot 1 = q_F
\end{aligned}$$

すなわち q_b は式 $(A-21)$ の境界条件を満足することが分かる．また，式 $(3-32)$ の微分方程式の両辺を t' で偏微分すれば

$$(\partial_t^2+\omega^2)G_{:t}(t,t') = -\delta'(t-t') \qquad (A-32)$$

を得るが，ここで $t'=t_I$ あるいは $t'=t_F$ の場合には t が時間領域 (t_I, t_F) 内にある限り式 $(A-32)$ の右辺は 0 に等しい．それゆえ，

$$(\partial_t^2+\omega^2)G_{:t}(t,t_I) = (\partial_t^2+\omega^2)G_{:t}(t,t_F) = 0 \quad t\in(t_I,t_F) \qquad (A-33)$$

が成立し，

$$\begin{aligned}
&(\partial_t^2+\omega^2)q_b(t) \\
&\quad = q_F(\partial_t^2+\omega^2)G_{:t}(t,t_F) - q_I(\partial_t^2+\omega^2)G_{:t}(t,t_I) = 0
\end{aligned} \qquad (A-34)$$

が結論される．こうして式 $(A-21)$ が証明されたことになる．

演習問題解答

第 1 章

1. S の関数で，その導関数が再び S に含まれるような関数の集合を S' とすれば $\hat{p}$ の定義域は S' である．この S' に含まれる任意の関数 f, g に対して

$$(\hat{p}^\dagger f, g) = (f, \hat{p}g) = \int_a^b dx f^*(i\frac{d}{dx}g) = i\{f^* g|_a^b - \int_a^b dx(\frac{d}{dx}f^*)g\}$$

$$= -i\int_a^b dx(\frac{d}{dx}f^*)g = \int_a^b dx(i\frac{d}{dx}f)^* g = (\hat{p}f, g)$$

が成立するから$\hat{p}$ は Hermite である．

$$f_n(x) = 1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

とすれば，$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は S' 内の関数列であり，

$$||f_n||^2 = \frac{2}{3}(b-a), \quad ||\hat{p}f_n||^2 = ||f_n'||^2 = \frac{2\pi^2 n^2}{b-a} \to \frac{||\hat{p}f_n||^2}{||f_n||^2} = \frac{\sqrt{3}\pi n}{b-a}$$

だから任意の $f \in S'$ に対して $||\hat{p}f||/||f|| < G$ を満足する G は存在しない．従って $\hat{p}$ は非有界である．

2. 実変数 λ に依存する作用素 $\hat{G}(\lambda)$ を

$$\hat{G}(\lambda) \equiv \exp(\lambda\hat{X})\hat{Y}\exp(-\lambda\hat{X})$$

で定義すれば

$$\hat{G}'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\hat{G}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{X})[\hat{X}, \hat{Y}]\exp(-\lambda\hat{X})$$

$$\hat{G}''(\lambda) = \frac{d^2}{d\lambda^2}\hat{G}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{X})[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]]\exp(-\lambda\hat{X}) = \hat{0}$$

だから $\hat{G}(\lambda)$ の 2 階以上の導関数は全て $\hat{0}$ となり，

$$\hat{G}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{G}^{(n)}{}_{(0)}\lambda^n = \hat{G}(0) + \hat{G}'(0)\lambda = \hat{Y} + [\hat{X}, \hat{Y}]\lambda$$

が言える．そこで，

$$\hat{F}(\lambda) \equiv \exp(\lambda\hat{X})\exp(\lambda\hat{Y})$$

を考えると，$\hat{F}(\lambda)$ は次式を満足する．

$$\frac{d}{d\lambda}\hat{F}(\lambda) = (\hat{X} + \hat{G}(\lambda))\hat{F}(\lambda) = (\hat{X} + \hat{Y} + [\hat{X}, \hat{Y}]\lambda)\hat{F}\lambda, \quad \hat{F}(0) = \hat{I}$$

仮定によって $\hat{X}+\hat{Y}$ と $[\hat{X},\hat{Y}]$ は可換であり，上の微分方程式と初期条件を満足する $\hat{F}(\lambda)$ は一意的に決まって

$$\hat{F}(\lambda)=\exp\{(\hat{X}+\hat{Y})\lambda+\frac{1}{2}[\hat{X},\hat{Y}]\lambda^2\}$$

となる．証明すべき等式を得るためには $\lambda=1$ とすればよい．

3. 通常の Weyl 変換に対する 1–5 節の計算で $\langle \boldsymbol{q}-\boldsymbol{v}/2|$ と $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{u}/2\rangle$ を $\langle \boldsymbol{q}-\xi\boldsymbol{v}|$, $|\boldsymbol{p}-\xi\boldsymbol{u}\rangle$ で置き換え，$|\boldsymbol{q}+\boldsymbol{v}/2\rangle$ と $\langle \boldsymbol{p}+\boldsymbol{u}/2|$ を $|\boldsymbol{q}+\eta\boldsymbol{v}\rangle$, $\langle \boldsymbol{p}+\eta\boldsymbol{u}|$ で置き換えれば良い．それゆえ，上述の式 (b),(c),(d) の他に，例えば本文中の式 $(1-82)$ に対応して

$$H_W^{\xi}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)=\int d\boldsymbol{u}e^{i\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{q}}\langle \boldsymbol{p}+\eta\boldsymbol{u}|H(\hat{\boldsymbol{q}},\hat{\boldsymbol{p}},t)|\boldsymbol{p}-\xi\boldsymbol{u}\rangle$$

が成立することも分る．ただし，$\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})$ の一般化 Weyl 変換は

$$W^{\xi}[\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p})]=\exp(\alpha\hat{q}+\beta\hat{p}+i(\xi-1/2)\alpha\beta)$$

となり，通常の Weyl 変換の場合 $(\xi=1/2)$ を別とすれば関数形は保存されない．

第 2 章

1. 実対称行列 S は適当な直交行列 T によって対角化され

$$S=T\Lambda T^t,\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$$

と表現できる．ここで Λ の対角成分 $\{\lambda_n\}_{n=1\sim N}$ は S の 固有値であり，S が可逆な実対称行列だから全て非零の実数であって

$$\det S=\det(T)\det(\Lambda)\det(T^t)=\det(TT^t)\det(\Lambda)=\det\Lambda=\Pi_{n=1}^N\lambda_n$$

が成立する．変数変換 $\boldsymbol{y}=T^t\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{y})$ を施せば $\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{y}=T$ だから

$$\int d\boldsymbol{x}\exp(\frac{i}{2}\boldsymbol{x}\cdot S\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{x}\exp(\frac{i}{2}\boldsymbol{x}\cdot T\Lambda T^t\boldsymbol{x})=\int d\boldsymbol{y}|\det T|\exp(\frac{i}{2}\boldsymbol{y}\cdot\Lambda\boldsymbol{y})$$

$$=\int d\boldsymbol{y}\exp(\frac{i}{2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n y_n^2)=\prod_{n=1}^{N}\int dy_n\exp(\frac{i}{2}\lambda_n y_n^2)$$

と書ける．$i\lambda_n/2=-\lambda/2i$ は非零の純虚数だから式 $(2-8)$ が適用でき，次式をえる．

$$\int d\boldsymbol{x}\exp(\frac{i}{2}\boldsymbol{x}\cdot S\boldsymbol{x})=\Pi_{n=1}^N\sqrt{2\pi i/\lambda_n}=\sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\Pi_{n=1}^N\lambda_n}}=\sqrt{\frac{(2\pi i)^N}{\det S}}$$

ところで，一般に対角行列 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_N)$ の指数関数は

$$\exp(D)=\sum_{n=1}^{\infty}D^n/n!=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_N)^n/n!$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{diag}(d_1^n,d_2^n,\cdots,d_N^n)/n!=\mathrm{diag}(\exp(d_1),\exp(d_2),\cdots,\exp(d_N))$$

と表現できるから，$\{\ln\lambda_n\}_{n=1\sim N}$ を要素とする対角行列の指数関数は

$$\exp(\mathrm{diag}(\ln\lambda_1,\cdots,\ln\lambda_N))=\mathrm{diag}(\exp(\ln\lambda_1,\cdots,\ln\lambda_N))$$

$$=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)=\Lambda$$

である．従って $\mathrm{diag}(\ln\lambda_1,\cdots,\ln\lambda_N)$ は $\ln\Lambda$ に等しい．また，$T^t=T^{-1}$ だから

$$\exp(T\ln\Lambda T^t)=\sum_{n=1}^{\infty}(T\ln\Lambda T^t)^n/n!$$

$$=T\{\sum_{n=1}^{\infty}(\ln\Lambda)^n/n!\}T^t=T\exp(\ln\Lambda)T^t=T\Lambda T^t=S$$

が成立し，$T\ln\Lambda T^t=\ln S$ が結論される．それゆえ

$$\mathrm{Tr}[\ln S]=\mathrm{Tr}[T\ln\Lambda T^t]=\mathrm{Tr}[\ln\Lambda]=\sum_{n=1}^{N}\ln\lambda_n=\ln(\prod_{n=1}^{N}\lambda_n)=\ln\det S$$

を得るが，両辺の指数関数を計算すれば第二式を得る．

2. 1次元自由粒子の時間発展Green関数は式(2-9)で与えられるから

$$G^l(q_F,t_F;q_I,t_I;t)=\langle q_F,t_F|\hat{q}^l(t)|q_I,t_I\rangle$$

$$=\int dq\langle q_F,t_F|\hat{q}^l(t)|q,t\rangle\langle q,t,|q_I,t_I\rangle$$

$$=\frac{m}{2\pi i\sqrt{(t_F-t)(t-t_I)}}\int dq\, q^l\exp\{\frac{im}{2}(\frac{(q_F-q)^2}{t_F-t}+\frac{(q-q_I)^2}{t-t_I})\}$$

と書ける．ここで，

$$\overline{q}\equiv\{q_F(t-t_I)+q_I(t_F-t)\}/(t_F-t_I)$$

を定義すれば

$$\frac{(q_F-q)^2}{t_F-t}+\frac{(q-q_I)^2}{t-t_I}=\frac{t_F-t_I}{(t_F-t)(t-t_I)}(q-\overline{q})^2+\frac{(q_F-q_I)^2}{t_F-t_I}$$

と変形できるから，変数変換

$$x=\sqrt{\frac{m(t_F-t_I)}{(t_F-t)(t-t_I)}}(q-\overline{q})\to q=\sqrt{\frac{(t_F-t)(t-t_I)}{m(t_F-t_I)}}(x+A)$$

を施せば所望の結果が得られる．また，

$$I_1=\int dx(x+A)\exp(\frac{i}{2}x^2)=A\int dx\exp(\frac{i}{2}x^2)=\sqrt{2\pi i}A$$

だから

$$G^1(q_F,t_F;q_I,t_I;t)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i(t_F-t_I)}}\frac{\{q(t-t_I)+q(t_F-t)\}}{(t_F-t_I)}$$

を得る．

3.
$$\delta A\equiv A[q+\varepsilon h]-A[q]$$

$$=\int_{t_I}^{t_F}dt\{L(q+\varepsilon h,\dot{q}+\varepsilon\dot{h},t)-L(q,\dot{q},t)\}$$

$$=\int_{t_I}^{t_F}dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}\varepsilon h+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\varepsilon\dot{h}\right)+O(\varepsilon^2)$$

だが

$$\int_{t_I}^{t_F} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{h} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h|_{t_I}^{t_F} - \int_{t_I}^{t_F} dt\ h \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$= \int_{t_I}^{t_F} dt\ h \left[\{\delta^+(t_F - t) - \delta^+(t - t_I)\} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right]$$

と変形できるから

$$\delta A = \int_{t_I}^{t_F} dt\ h \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right.$$

$$\left. + \{\delta^+(t_F - t) - \delta^+(t - t_I)\} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] + O(\varepsilon^2)$$

が成立する．それゆえ，

$$\frac{\delta A}{\delta q(t)} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \{\delta^+(t_F - t) - \delta^+(t - t_I)\} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

を得る．ここで片側デルタ関数 δ^+ は任意の「通常の関数 $f(t)$」に対して

$$\int_{a-\varepsilon_1}^{a+\varepsilon_2} dt\ \delta^+(t-a) f(t) = \int_{a}^{a+\varepsilon_2} dt\ \delta^+(t-a) f(t) = f^+(a)$$

$$= \lim_{\varepsilon>0, \varepsilon\to 0} f(a+\varepsilon)$$

という性質を持つ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0)$．

任意関数 $h(t)$ に斉次境界条件 $h(t_F) = h(t_I) = 0$ が課されている場合には境界項を考慮する必要がなく，

$$\frac{\delta A}{\delta q(t)} = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

を得る．

第3章

1. 式 (3-56) から式 (3-70),(3-71) が得られるが，式 (3-71) によれば

$$G_{t;t}(t_F, t') = \omega \frac{\cos\omega(t' - t_I)}{\sin\omega T} \to G_{t;t}(t_F, t_F) = \omega \frac{\cos\omega T}{\sin\omega T}, G_{t;t}(t_F, t_I) = \frac{\omega}{\sin\omega T}$$

$$G_{t;t}(t_I, t'), = \omega \frac{\cos\omega(t' - t_F)}{\sin\omega T} \to G_{t;t}(t_I, t_I) = \omega \frac{\cos\omega T}{\sin\omega T}, G_{t;t}(t_I, t') = \frac{\omega}{\sin\omega T}$$

これらを A_0 の定義式 (3-35) に代入すれば式 (3-36) を得る．

2. 基底状態の波動関数は式 (3-65) で与えられるから式 (3-60) は

$$Z_F[t_F, t_I; J] = G(0,0;T)\sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \exp(iA_2)$$

$$\times \int dq_I dq_F\ \exp[i\{\frac{i\omega(q_F^2 + q_I^2)}{2} + A_0 + A_1\}] \qquad \text{(a)}$$

と書ける．式 (3-35), (3-36) を使って A_0, A_1 を $\boldsymbol{q} = (q_F, q_I)^t$ の関数として表わせば

$$\frac{i\omega(q_F^2 + q_I^2)}{2} + A_0 + A_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}\cdot Q\boldsymbol{q} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{q}$$

$$= \frac{1}{2}(q + Q^{-1}a)\cdot Q(q + Q^{-1}a) - \frac{1}{2}a\cdot Q^{-1}a$$

を得る．ただし，

$$a \equiv \begin{pmatrix} I_F \\ -I_I \end{pmatrix}, Q \equiv \frac{\omega}{\sin\omega T}\begin{pmatrix} e^{i\omega T} & -1 \\ -1 & e^{i\omega T} \end{pmatrix} \to Q^{-1} = \frac{1}{2i\omega}\begin{pmatrix} 1 & e^{-i\omega T} \\ e^{-i\omega T} & 1 \end{pmatrix}$$

であり，I_F, I_I は式(3-70)で定義される．Q は実対称行列ではないため式(3-34)は直接には適用できないが，実対称行列と同様に直交行列

$$T \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T^t = T^{-1}$$

によって対角化されるため，式(3-36)の導出法 (2章問1) をそのまま用いて

$$\int dq \exp\left[\frac{i}{2}(q + Q^{-1}a)\cdot Q(q + Q^{-1}a)\right] = \int dq \exp\left(\frac{i}{2}q\cdot Qq\right) = \frac{2\pi i}{\sqrt{\det Q}}$$

が示される．また，

$$\zeta(t,t') \equiv -\{\sin\omega\bar{t}_I \sin\omega\bar{t}'_I + \sin\omega\bar{t}_F \sin\omega\bar{t}'_F$$
$$+ e^{-i\omega T}(\sin\omega\bar{t}_I \sin\omega\bar{t}'_F + \sin\omega\bar{t}'_I \sin\omega\bar{t}_F)\}/2i\omega\sin^2\omega T \qquad (b)$$
$$\bar{t}_I \equiv t - t_I, \quad \bar{t}'_I \equiv t' - t_I, \quad \bar{t}_F \equiv t_F - t, \quad \bar{t}'_F \equiv t_F - t'$$

を使えば

$$-a\cdot Q^{-1}a = \frac{-1}{2i\omega}\{I_F^2 + I_I^2 - 2e^{-i\omega T}I_F I_I\} = \int_{t_I}^{t_F} dt \int_{t_I}^{t_F} dt' J(t)\zeta(t,t')J(t')$$

と表現できるから

$$A_2 - \frac{1}{2}a\cdot Q^{-1}a = \frac{1}{2}\int_{t_I}^{t_F} dt \int_{t_I}^{t_F} dt' J(t)\{G(t,t') + \zeta(t,t')\}J(t') \qquad (c)$$

が成立する．それゆえ，

$$\Delta_F(t,t') = G(t,t') + \zeta(t,t') \qquad (d)$$

が成立するならば，式(c)と式(d)を式(a)に代入して $\det Q = 2i\omega^2 e^{i\omega T}/\sin\omega T$ に注意すれば式(3-66)を得る．では，式(d)を導出する．式(b)右辺の分子は

$$-\sin\omega\bar{t}_I(\sin\omega\bar{t}'_I + e^{-i\omega T}\sin\omega\bar{t}'_F) - \sin\omega\bar{t}_F(\sin\omega\bar{t}'_F + e^{-i\omega T}\sin\omega\bar{t}'_I)$$
$$= -(e^{-i\omega\bar{t}'_F}\sin\omega\bar{t}_I + e^{-i\omega\bar{t}'_I}\sin\omega\bar{t}_F)\sin\omega T$$
$$= i\{\cos\omega(t_F + t_I - t - t') - e^{-i\omega T}\cos\omega(t - t')\}\sin\omega T$$

と変形されるから，式(b)は

$$\zeta(t,t') = \frac{\cos\omega(t_F + t_I - t - t') - e^{-i\omega T}\cos\omega(t - t')}{2\omega\sin\omega T}$$

と表現できる．それゆえ，式(3-56)で与えられる $G(t,t')$ と $\zeta(t,t')$ の和を計算し($t < t'$ の場合と $t > t'$ の場合とを分けて計算する)，式(3-68)の右辺と比較すれば式(d)が結論される．

$\Delta_F(t,t')$ が式(3-67)の境界条件を満足することは直接の計算によって簡単に確認できる．また，$\zeta(t,t')$ は t の関数としては角周波数 ω の三角関数であるため

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\zeta(t,t') = 0$$

が成立し，$G(t,t')$ が式 (3-32) の微分方程式を満足することから$\Delta_F(t,t')$ が式 (3-67) の微分方程式に従がう事が分かる．

3. 境界条件

$$\dot{q}(t_I)=0,\quad \dot{q}(t_F)=0$$

を満足する式 (3-39) の解として

$$q_1(t)=\cos\omega(t-t_I),\quad q_2(t)=\cos\omega(t_F-t)$$

を選べば

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ \dot{q}_1 & \dot{q}_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\omega(t-t_I) & \cos\omega(t_F-t) \\ -\omega\sin\omega(t-t_I) & \omega\sin\omega(t_F-t) \end{vmatrix}$$

$$=\omega\cos\omega(t-t_I)\sin\omega(t_F-t)+\omega\sin\omega(t-t_I)\cos\omega(t_F-t)$$

$$=\omega\sin\omega(t_F-t_I)$$

だから，式 (3-54) は

$$N(t,t')=\Delta^{-1}q_1(t)q_2(t')\theta(t'-t)+\Delta^{-1}q_1(t')q_2(t)\theta(t-t')$$

$$=\frac{\cos\omega(t-t_I)\cos\omega(t_F-t')}{\omega\sin\omega T}\theta(t'-t)+\frac{\cos\omega(t'-t_I)\cos\omega(t_F-t)}{\omega\sin\omega T}\theta(t-t')$$

と書ける．

第 4 章

1. $(k_1,\cdots,k_R)\equiv\mathrm{sort}(l_1,\cdots,l_R)$ とするとき，$1\le n_1\le\cdots\le n_R\le N$ を満足する任意の整数の組 $(n_1,\cdots,n_R)$ に対して

$$\varepsilon(\sigma^{l_1\cdots,l_R}_{k_1,\cdots,k_R})\Psi_{l_1,\cdots,l_R}(\boldsymbol{v}_{n_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_R})=\begin{cases}1 & (n_1,\cdots,n_R)=(k_1,\cdots,k_R)\\ 0 & (n_1,\cdots,n_R)\ne(k_1,\cdots,k_R)\end{cases}\qquad\text{(a)}$$

が成立することを示せば，$\psi_{k_1,k_2,\cdots,k_R}$ の定義式 (4-17) によって

$$\varepsilon(\sigma^{l_1\cdots,l_R}_{k_1,\cdots,k_R})\Psi_{l_1,\cdots,l_R}=\psi_{k_1,\cdots.k_R}\to\Psi_{l_1,\cdots,l_R}=\varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1\cdots,l_R})\psi_{k_1,\cdots,k_R}$$

が結論される ($\varepsilon(\sigma^{l_1\cdots,l_R}_{k_1,\cdots,k_R})\varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1\cdots,l_R})=\varepsilon(\sigma^{l_1\cdots,l_R}_{k_1,\cdots,k_R}\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1\cdots,l_R})=\varepsilon(\sigma^{k_1\cdots,k_R}_{k_1,\cdots,k_R})=1$ に注意)．

まず式 (4-21) で $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_R$ に $\boldsymbol{v}_{n_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_R}$ を代入し，式 (4-20) を利用すれば

$$\Psi_{l_1,\cdots,l_R}(\boldsymbol{v}_{n_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_R})=\det D,\quad D\equiv\begin{pmatrix}\delta_{l_1,n_1} & \delta_{l_1,n_2} & \cdots & \delta_{l_1,n_R}\\ \delta_{l_2,n_1} & \delta_{l_2,n_2} & \cdots & \delta_{l_2,n_R}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta_{l_R,n_1} & \delta_{l_R,n_2} & \cdots & \delta_{l_R,n_R}\end{pmatrix}\qquad\text{(b)}$$

を得る．ところで，行列 D は

$$D'\equiv\begin{pmatrix}\delta_{k_1,n_1} & \delta_{k_1,n_2} & \cdots & \delta_{k_1,n_R}\\ \delta_{k_2,n_1} & \delta_{k_2,n_2} & \cdots & \delta_{k_2,n_R}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta_{k_R,n_1} & \delta_{k_R,n_2} & \cdots & \delta_{k_R,n_R}\end{pmatrix}$$

の行に置換 $\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1,\cdots,l_R}$ を施すことによって得られるから $\det D = \varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1,\cdots,l_R})\det D'$ であり，これを式 (b) に代入すれば

$$\begin{aligned}&\Psi_{l_1,\cdots,l_R}(\boldsymbol{v}_{n_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_R}) = \varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1,\cdots,l_R})\det D' \\ &\quad\to \varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1,\cdots,l_R})\Psi_{l_1,\cdots,l_R}(\boldsymbol{v}_{n_1},\cdots,\boldsymbol{v}_{n_R}) = \det D'\end{aligned} \tag{c}$$

を得る $(\varepsilon(\sigma^{k_1,\cdots,k_R}_{l_1,\cdots,l_R})^2 = 1$ であることに注意). $k_1,\cdots,k_R$ だけでなく $n_1\cdots,n_R$ もまた小さい順に並んでいることから，$(n_1\cdots,n_R)\neq(k_1,\cdots,k_R)$ ならば $(n_1,\cdots,n_R)$ の中に $(k_1,\cdots,k_R)$ のどれとも一致しない数値が含まれ，行列 D' の何列目かが全て零となるから $\det D' = 0$ である．一方，$(n_1,\cdots,n_R) = (k_1,\cdots.k_R)$ ならば行列 D' は単位行列だから $\det D' = 1$ である。この結果を式 (c) に代入すれば式 (a) を得る。

2. 任意の $\zeta_1,\zeta_2\in C(R^{*2}_N)$ に対して$\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2\in R^{*2}_n$ が存在し，$\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ と書ける．$\zeta_1+\zeta_2 = (\xi_1+\xi_2) + i(\eta_1+\eta_2)$ であり，$\xi_1+\xi_2$ と $\eta_1+\eta_2$ は R^*_N に属するから

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta_1+\zeta_2) &= \varphi((\xi_1+\xi_2)+i(\eta_1+\eta_2)) = (\overline{\xi_1+\xi_2}) + i(\overline{\eta_1+\eta_2}) \\ &= (\overline{\xi_1}+\overline{\xi_2}) + i(\overline{\eta_1}+\overline{\eta_2}) = (\overline{\xi_1}+i\overline{\eta_1}) + (\overline{\xi_2}+i\overline{\eta_2}) = \varphi(\zeta_1)+\varphi(\zeta_2)\end{aligned} \tag{a}$$

が成立する．また，任意の $\zeta\in C(R^{*2}_N)$ と$\gamma\in C$ に対して $\xi,\eta\in R^*_N$ と$\alpha,\beta\in R$ が存在して$\zeta = \xi + i\eta, \gamma = \alpha + i\beta$ と書けるが，$\alpha\xi-\beta\eta, \alpha\eta+\beta\xi\in R^*_N$ だから

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma\zeta) &= \varphi((\alpha\xi-\beta\eta)+i(\alpha\eta+\beta\xi)) = (\overline{\alpha\xi-\beta\eta}) + i(\overline{\alpha\eta+\beta\xi}) \\ &= (\alpha\overline{(\xi)}-\beta\overline{\eta}) + i(\alpha\overline{\eta}+\beta\overline{\xi}) = (\alpha+i\beta)(\overline{\xi}+i\overline{\eta}) = \gamma\varphi(\zeta)\end{aligned} \tag{b}$$

が成立するから φ は線型である．可逆性を示すにはφ が単射 ($\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$ ならば $\zeta_1 = \zeta_2$)，かつ全射 (C^*_N の任意の元 ω に対して $\omega = \varphi(\zeta)$ を満足する$\zeta\in C(R^{*2}_N)$ が存在する) であることを証明すれば良い．

【単射性】 $\varphi(\zeta_1) = \varphi(\zeta_2)$ ならば任意の $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}\in C_N$ に対して$\varphi(\zeta_1)(\boldsymbol{w}) = \varphi(\zeta_2)(\boldsymbol{w})$ が成立するが，これは任意の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in R_N$ に対して

$$\{\xi_1(\boldsymbol{u})-\eta(\boldsymbol{v})\} + i\{\xi_1(\boldsymbol{v})+\eta_1(\boldsymbol{u})\} = \{\xi_2(\boldsymbol{u})-\eta_2(\boldsymbol{v})\} + i\{\xi_2(\boldsymbol{v})+\eta_2(\boldsymbol{u})\}$$

が成立することを意味する．特に $\boldsymbol{v}=0$ の場合を考えると任意の $\boldsymbol{u}\in R_N$ に対して

$$\xi_1(\boldsymbol{u})+i\eta_1(\boldsymbol{u}) = \xi_2(\boldsymbol{u})+i\eta_2(\boldsymbol{u}) \to \xi_1(\boldsymbol{u}) = \xi_2(\boldsymbol{u}), \eta_1(\boldsymbol{u}) = \eta_2(\boldsymbol{u})$$

が成立することになり，これから $\zeta_1 = \zeta_2$ が結論される．

【全射性】 C^*_N の任意の元 ω が与えられたとき，

$$\xi(\boldsymbol{u}) \equiv \frac{\omega(\boldsymbol{u}) + \{\omega(\boldsymbol{u})\}^*}{2}, \quad \eta(\boldsymbol{u}) \equiv \frac{\omega(\boldsymbol{u}) - \{\omega(\boldsymbol{u})\}^*}{2} \quad (\boldsymbol{u}\in R_N)$$

と定義される ξ,η は R^*_N に属する ($\{\omega(\boldsymbol{u})\}^*$ は$\omega(\boldsymbol{u})$ の複素共役)．そこで$\zeta\equiv\xi+i\eta$ とすれば$\zeta\in C(R^{*2}_N)$ であり，任意の $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}\in C_N$ に対して $\omega(\boldsymbol{w}) = \varphi(\zeta)(\boldsymbol{w})$ が成立する．従って $\omega = \varphi(\zeta)$ が言える．

3. V^M_G の任意の元 f に対して

$$\{\hat{\xi}_m,\hat{\xi}_n\}f = \xi_m\xi_n f + \xi_n\xi_m f = 0 \quad (m,n = 1\sim M)$$

が成立するから $\{\hat{\xi}_m,\hat{\xi}_n\} = \hat{0}$ である．また，微分を含む反交換子については以下のように証明される．

$m=n$ の場合：V_G^M の任意の元 f は ξ_m に依存しない e 数 f_0, f_1 を用いて

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_M)=f_0+f_m\xi_m$$

と書けるから，任意の $m=1\sim M$ に対して

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_m},\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right\}f=2\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{\partial}{\partial\xi_m}f=0,\quad \left\{\hat{\xi}_m,\frac{\partial}{\partial\xi_m}\right\}f=f \tag{a}$$

が成立する．

$m\neq n$ の場合：V_G^M の任意の元はξ_m,ξ_n に依存しない e 数 $f_0,f_m,f_n,f_{m,n}$ を用いて

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{N_F})=f_0+f_m\xi_m+f_n\xi_n+f_{m,n}\xi_m\xi_n$$

と書けるから，任意の $m,n=1\sim M(m\neq n)$ に対して

$$\begin{aligned}\{\frac{\partial}{\partial\xi_m},\frac{\partial}{\partial\xi_n}\}f&=\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{\partial}{\partial\xi_n}f+\frac{\partial}{\partial\xi_n}\frac{\partial}{\partial\xi_m}f \\ &=-\frac{\partial}{\partial\xi_m}(f_{m,n})_d\xi_m+\frac{\partial}{\partial\xi_n}(f_{m,n})_d\xi_n=0\end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned}\{\hat{\xi}_m,\frac{\partial}{\partial\xi_n}\}f&=\xi_m\frac{\partial}{\partial\xi_n}f+\frac{\partial}{\partial\xi_n}\xi_m f=\xi_m\{(f_n)_d-(f_{m,n})_d\xi_m\} \\ &+\frac{\partial}{\partial\xi_n}\{\xi_m f_0+\xi_m f_n\xi_n\}=\xi_m(f_n)_d-\xi_m(f_n)_d=0\end{aligned} \tag{c}$$

が成立する．V_G^M の任意の元 f に対して (a)(b)(c) が成立することから式 (4-151) が結論される．

第5章

1. 例えば，$\{F^*,G^*\}_P \underset{\Gamma^{(2)}}{\approx} \{F,D\}_D$ は以下のように示される．

$$\begin{aligned}\{F^*,D^*\}_P&=\{F-\sum_{mn}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\varphi_n, \\ &\qquad G-\sum_{kl}\{G,\varphi_k\}_P[\Delta^{-1}]_{kl}\varphi_l\} \\ &\underset{\Gamma^{(2)}}{\approx}\{F,G\}_P-\sum_{mn}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\} \\ &\qquad -\sum_{kl}\{G,\varphi_k\}_P[\Delta^{-1}]_{kl}\{F,\varphi_l\}_P \\ &\qquad +\sum_{mnkl}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{G,\varphi_k\}_P[\Delta^{-1}]_{kl}\{\varphi_n,\varphi_l\}_P \\ &=\{F,G\}_P-\sum_{mn}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\} \\ &\qquad -\sum_{kl}\{F,\varphi_l\}_P[-\Delta^{-1}]_{lk}(-\{\varphi_k,G\}_P) \\ &\qquad +\sum_{mnkl}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}[\Delta]_{nl}[-\Delta^{-1}]_{lk}(-\{\varphi_k,G\}_P) \\ &=\{F,G\}_P-2\sum_{mn}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\}\end{aligned}$$

$$+\sum_{mkl}\{F,\varphi_m\}_P\delta_{ml}[\Delta^{-1}]_{lk}\{\varphi_k,G\}_P$$

$$=\{F,G\}_P-\sum_{mn}\{F,\varphi_m\}_P[\Delta^{-1}]_{mn}\{\varphi_n,G\}$$

残りの弱等式も同様にして導かれる．

2. 正準変数の時間に関する 2 階の導関数は正準方程式から，

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\approx\frac{\partial\dot{\boldsymbol{r}}}{\partial t}+\{\dot{\boldsymbol{r}},H_T\}_P=\frac{\partial}{\partial t}\{\boldsymbol{r},H_T\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T\}_P,H_T\}_P$$

$$=\{\boldsymbol{r},\frac{\partial H_T}{\partial t}\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T\}_P,H_T\}_P$$

として与えられる．従って，μ,ν に関する 2 次までの近似で

$$\boldsymbol{r}'(t_0+\mu)=\boldsymbol{r}_0+\mu\{\boldsymbol{r},H_T^{(i)}\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$$
$$+\frac{1}{2}\mu^2\left[\left\{\boldsymbol{r},\frac{\partial H_T^{(i)}}{\partial t}\right\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T^{(i)}\}_P,H_T^{(i)}\}_P\right]\Bigg|_{\boldsymbol{r}_0,t_0} \tag{a}$$

$$\boldsymbol{r}'(t_0+\mu+\nu)=\boldsymbol{r}'(t_0+\mu)+\nu\{\boldsymbol{r},H_T^{(j)}\}_P|_{\boldsymbol{r}'_\mu,t_0+\mu}$$
$$+\frac{1}{2}\nu^2[\{\boldsymbol{r},\frac{\partial H_T^{(j)}}{\partial t}\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T^{(j)}\}_P,H_T^{(j)}\}_P]|_{\boldsymbol{r}'_\mu,t_0+\mu} \tag{b}$$

が成立する．ここで $H_T^{(i)},H_T^{(j)}$ は各々ν_i,ν_j だけが変化した場合の全 Hamiltonian

$$H_T^{(i)}\equiv H_T+\delta\nu_i\psi_i,\quad H_T^{(j)}\equiv H_T+\delta\nu_j\psi_j \tag{c}$$

を意味する．さて，時刻 t_0 で $\boldsymbol{r}_0$ にあった代表点は $H_T^{(i)}$ の下で時刻 $t_0+\mu$ に点 $\boldsymbol{r}'_\mu$ に移動するので，任意の物理量 F に対して

$$F|_{\boldsymbol{r}'(t_0+\mu),t_0+\mu}=F|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}+\mu\dot{F}|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}+\cdots$$
$$=F|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}+\mu[\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H_T^{(i)}\}]|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}+\cdots \tag{d}$$

が成立するが，この公式を式 (b) の右辺第 2 項と 3 項に適用し，式 (a) を代入すればμ,ν に関する 2 次までの近似で

$$\boldsymbol{r}'(t_1)=\boldsymbol{r}_0+\mu\{\boldsymbol{r},H_T^{(i)}\}_P|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$$
$$+\frac{1}{2}\mu^2\left[\left\{\boldsymbol{r},\frac{\partial H_T^{(i)}}{\partial t}\right\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T^{(i)}\}_P,H_T^{(i)}\}_P\right]\Bigg|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$$
$$+\nu\left[\{\boldsymbol{r},H_T^{(j)}\}_P+\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}\{\boldsymbol{r},H_T^{(j)}\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T^{(j)}\}_P,H_T^{(j)}\}_P\right)\right]\Bigg|_{\boldsymbol{r}_0,t_0}$$
$$+\frac{1}{2}\nu^2\left[\left\{\boldsymbol{r},\frac{\partial H_T^{(j)}}{\partial t}\right\}_P+\{\{\boldsymbol{r},H_T^{(j)}\}_P,H_T^{(j)}\}_P\right]\Bigg|_{\boldsymbol{r}_0,t_0} \tag{e}$$

を得る．上式で $H_T^{(i)}$ と $H_T^{(j)}$，μ と ν とを置き換えれば $\boldsymbol{r}''(t_1)$ を得るので，$\boldsymbol{r}(t_1)$ と等価な 2 点 $\boldsymbol{r}'(t_1),\boldsymbol{r}''(t_1)$ を結ぶベクトル$\delta\boldsymbol{r}(t_1)$ は

$$\delta\boldsymbol{r}(t_1)\equiv\boldsymbol{r}''(t_1)-\boldsymbol{r}'(t_1)$$

$$= \mu\nu \left[\frac{\partial}{\partial t} \{\mathbf{r}, H_T^{(i)} - H_T^{(j)}\}_P + \{\mathbf{r}, \{H_T^{(i)}, H_T^{(j)}\}_P\}_P \right] \Bigg|_{r_0, t_0} \tag{f}$$

として与えられる．ただし，Jacobi の恒等式から

$$\{\{r, H_T^{(i)}\}_P, H_T^{(j)}\}_P - \{\{\mathbf{r}, H_T^{(j)}\}_P, H_T^{(i)}\}_P = \{r, \{H_T^{(i)}, H_T^{(j)}\}\} \tag{g}$$

が成立することを利用した．式 (f) に式 (c) を代入し，$\delta\nu_i, \delta\nu_j$ が定数であること，拘束条件量 ψ_i, ψ_j が時間を陽に含まないことを利用すれば式 (5-182) を得る．

3. T が可逆だから $\boldsymbol{R}' = \mathbf{0}$ は $\chi = \mathbf{0}$ を意味し，$\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}$ では $\chi = \mathbf{0}$ が成立する．

従って，$\{\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}'^t\}_P$ の mn 要素 $\{R'_m, R'_n\}_P$ は

$$\{R'_m, R'_n\}_P = \left\{ \sum_{k=1}^{2N_c} T_{mk}\chi_k, \sum_{l=1}^{2N_c} T_{nl}\chi_l \right\}_P = \sum_{k,l=1}^{2N_c} T_{mk}\{\chi_k, \chi_l\}_P T_{nl}$$

$$+ \sum_{k,l=1}^{2N_c} \chi_k \{T_{mk}, \chi_l\}_P T_{nl} + \sum_{k,l=1}^{2N_c} T_{mk}\{\chi_k, T_{nl}\}_P \chi_l + \sum_{k,l=1}^{2N_c} \chi_k \{T_{mk}, T_{nl}\}_P \chi_l$$

$$\underset{\mathfrak{S}_{2(N-N_c)}}{\approx} \sum_{k,l}^{2N_c} T_{mk}\{\chi_k, \chi_l\}_P T_{nl}$$

と書け，これを行列表現すれば式 (a) を得る．

$\boldsymbol{R}'$ を構成する $2N_c$ 個の関数 $\{R'_n\}_{n=1\sim 2N_c}$ は互いに独立だから，他に $2(N-N_c)$ 個の関数を導入して $(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}^*)$ が $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ と 1 対 1 に対応するように $2(N-N_c)$ 次元のベクトル $\boldsymbol{R}^*$ を構成することが可能である．すると，位相空間上の任意関数は $(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}^*)$ の関数として $F(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}^*)$ と表現でき，

$$\int d\boldsymbol{R}' \delta(\chi) F(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}^*) = \int d\boldsymbol{R}' \delta(T^{-1}\boldsymbol{R}') F(\boldsymbol{R}', \boldsymbol{R}^*)$$

$$= \int d\boldsymbol{x} \left| \det\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial \boldsymbol{x}}\right) \right| \delta(\boldsymbol{x}) F(T\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R}^*) = |\det(T)| F(\mathbf{0}, \boldsymbol{R}^*)$$

が成立するが (変数変換 $\boldsymbol{x} = T^{-1}\boldsymbol{R}'$ を施している)，これは $\delta(\chi) = |\det(T)|\delta(\boldsymbol{R}')$ を意味する．こうして式 (b) が結論される．

第 6 章

1. まず，定義より

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}[x]}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x)$$

となることに注意すると，

$$\mathcal{H}[x] = \dot{\phi}(x)\pi(x) - \mathcal{L}[x]$$

$$= \{\dot{\phi}(x)\}^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

$$= \{\dot{\phi}(x)\}^2 - \frac{1}{2}\{\dot{\phi}(x)\}^2 - \frac{1}{2}\partial_k \phi(x) \partial^k \phi(x) + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

$$= \frac{1}{2}\{\dot{\phi}(x)\}^2 + \frac{1}{2}\{\nabla\phi(x)\}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2(x)$$

$$= \frac{1}{2}\{\pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x)\}$$

$$= \mathcal{H}(\phi(x), \partial_k\phi(x), \pi(x))$$

が得られる．

今の場合は，$\mathcal{H}[x]$ が $\phi(x), \partial_k\phi(x), \pi(x)$ の関数となったが，一般には $\phi(x)$, $\partial_k\phi(x)$, $\pi(x)$, $\partial_k\pi(x)$ の関数となる．

2.
$$\{\phi(x), \pi(y)\}_P \equiv \int d^3z \left\{\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(z)}\frac{\delta\pi(y)}{\delta\pi(z)} - \frac{\delta\phi(x)}{\delta\pi(z)}\frac{\delta\pi(y)}{\partial\phi(y)}\right\}$$

$$= \int d^3z\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\delta^3(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})$$

$$= \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

となる．また，

$$\{\phi(x), \phi(y)\}_P \equiv \int d^3z \left\{\frac{\delta\phi(x)}{\delta\phi(z)}\frac{\delta\phi(y)}{\delta\pi(z)} - \frac{\delta\phi(x)}{\delta\pi(z)}\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(z)}\right\} = 0$$

$$\{\pi(x), \pi(y)\}_P \equiv \int d^3z \left\{\frac{\delta\pi(x)}{\delta\phi(z)}\frac{\delta\pi(y)}{\delta\pi(z)} - \frac{\delta\pi(x)}{\delta\pi(z)}\frac{\delta\pi(y)}{\delta\phi(z)}\right\} = 0$$

となる．

第7章

1. Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu(x)} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}[x]}{\partial\partial_\mu A_\nu(x)} = 0$$

から直ちに

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{a}$$

が得られる．また，$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ から，

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu F_{\nu\lambda}(x) + \partial_\nu F_{\lambda\mu}(x) = 0 \tag{b}$$

が得られる．式 (a)，(b) が Maxwell の方程式である．以下それをみてみよう．

まず，

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -(\partial_1 A^2 - \partial_2 A^1) = -(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$$= -(\nabla\times\boldsymbol{A})_z = -B_z$$

$$F_{13} = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 = \partial_z A_x - \partial_x A_z = (\nabla\times\boldsymbol{A})_y = B_y$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = -(\partial_y A_z - \partial_z A_y) = -(\nabla\times\boldsymbol{A})_x = -B_x$$

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = -\partial_t A_x - \partial_x\phi = \left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right)_x = E_x$$

$$F_{02} = E_y, \quad F_{03} = E_z$$

となることに注意すると，

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

と

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．これを用いて式 (a) を計算してみると，

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ &= \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \nabla \cdot \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

つまり，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

が導かれる．また，例えば

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu F^{\mu 1} = \partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = -\partial_t E_x + \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ &= \left(-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{B}\right)_x \end{aligned}$$

が得られ，$\nu = 2, 3$ のときは同様にして y, z 成分が求まるので，結局

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

となる．次に，式 (b) より

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} = -\partial_t B_z - \partial_x E_y + \partial_y E_x \\ &= \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \nabla \times \boldsymbol{E}\right)_z \end{aligned}$$

が得られ，$\mu\nu = 13, 23$ のときは y, x 成分が求まるので，

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

となる．また，

$$0 = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = -\partial_x B_x - \partial_y B_y - \partial_z B_z = -\nabla \cdot \boldsymbol{B}$$

から，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

となる．以上で自由電磁場の四つの Maxwell 方程式が導かれた．

2.

$$\begin{aligned} &\langle \Psi_F, t_F | T \hat{\phi}^{l_1}(x_1) \hat{\phi}^{l_2}(x_2) \cdots \hat{\phi}^{l_K}(x_K) | \Psi_I, t_I \rangle \\ &= \langle \Psi_F, t_F | \hat{\phi}^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \Psi_I, t_I \rangle \\ &= \int \prod_{\boldsymbol{y}} d\phi(\boldsymbol{y}, t_I) \prod_{\boldsymbol{z}} d\phi(\boldsymbol{z}, t_F) \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \\ &\quad \times \langle \phi_F, t_F | \hat{\phi}^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle \end{aligned} \quad \text{(a)}$$

ここで，

$$\langle \phi_F, t_F | \hat{\phi}^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \prod_{x_{\sigma(1)}} d\phi(x_{\sigma(1)}) \langle \phi_F, t_F | \hat{\phi}^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) | \phi_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} \rangle \langle \phi_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} | \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \prod_{x_{\sigma(1)}} d\phi(x_{\sigma(1)}) \phi^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) \langle \phi_F, t_F | \phi_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} \rangle \langle \phi_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} | \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \prod_{x_{\sigma(1)}} d\phi(x_{\sigma(1)}) \phi^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) G[\phi_F, \phi_{\sigma(1)}; t_F - t_{\sigma(1)}] \langle \phi_{\sigma(1)}, t_{\sigma(1)} | \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle$$

となるので，これを繰り返すと

$$\langle \phi_F, t_F | \hat{\phi}^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \prod_{k=1}^{K} \prod_{x_{\sigma(k)}} d\phi(x_{\sigma(k)}) \phi^{l_{\sigma(k)}}(x_{\sigma(k)}) G[\phi_{\sigma(k-1)}, \phi_{\sigma(k)}; t_{\sigma(k-1)} - t_{\sigma(k)}] \times G[\phi_{\sigma(K)}, \phi_I; t_{\sigma(K)} - t_I]$$

が得られる．但し，$t_{\sigma(0)} \equiv t_F, \phi_{\sigma(0)} \equiv \phi_F$ とした．これから，

$$t_F \equiv t_{\sigma(0)} > t_{\sigma(1)} > t_{\sigma(2)} > \cdots > t_{\sigma(K)} > t_I$$

に注意すると，時間発展 Green 関数がうまく時間的につながっており，また $\phi^{l_{\sigma(k)}}(x_{\sigma(k)})$ は c 数関数となっているので，結局

$$\langle \phi_F, t_F | \hat{\phi}^{l_{\sigma(1)}}(x_{\sigma(1)}) \hat{\phi}^{l_{\sigma(2)}}(x_{\sigma(2)}) \cdots \hat{\phi}^{l_{\sigma(K)}}(x_{\sigma(K)}) | \phi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \mathfrak{D}\phi \prod_{k=1}^{K} \{\phi(x_{\sigma(k)})\}^{l_{\sigma(k)}} \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]$$

$$= \int \mathfrak{D}\phi \prod_{k=1}^{K} \{\phi(x_k)\}^{l_k} \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]$$

となる．従ってこれを式 (a) に代入し，$\prod_{y} d\phi(y, t_I) \prod_{z} d\phi(z, t_F)$ を含んだ積分測度を改めて $\mathfrak{D}\phi$ と記すことにすると，

$$\langle \Psi_F t_F | T \hat{\phi}^{l_1}(x_1) \hat{\phi}^{l_2}(x_2) \cdots \hat{\phi}^{l_K}(x_K) | \Psi_I, t_I \rangle$$

$$= \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^*[\phi_F] \Psi_I[\phi_I] \prod_{k=1}^{K} \{\phi(x_k)\}^{l_k} \exp i \int_{t_I}^{t_F} d^4x \mathcal{L}[x]$$

が得られる．

3. $N \equiv \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$ とおくと,

$$Z[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; J] = \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \exp i \int d^4x \{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I e^{i\int d^4x J(x)\phi(x)} \cdot e^{i\int d^4x \mathcal{L}[x]}$$

より, 例えば

$$i^{-l_k} \left. \frac{\delta^{l_k} Z}{\delta\{J(x_k)\}^{l_k}} \right|_{J=0} = \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \{\phi(x_k)\}^{l_k} e^{\int d^4x \mathcal{L}[x]}$$

となるから

$$i^{-(l_1+l_2+\cdots+l_K)} \left. \frac{\delta^{(l_1+l_2+\cdots+l_K)} Z}{\delta\{J(x_1)\}^{l_1} \delta\{J(x_2)\}^{l_2} \cdots \delta\{J(x_K)\}^{l_K}} \right|_{J=0}$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \{\phi(x_1)\}^{l_1} \{\phi(x_2)\}^{l_2} \cdots \{\phi(x_K)\}^{l_K} \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$$

$$= G^{l_1 l_2 \cdots l_K}[\Psi_F, t_F; \Psi_I, t_I; x_1, x_2, \cdots, x_K]$$

が得られる.

4. 式(7-27)の導出と同様にして,

$$\left\langle \Psi_F, t_F \left| T \exp i \int d^4x J(x)\hat{\phi}(x) \right| \Psi_I, t_I \right\rangle$$

$$= \left\langle \Psi_F, t_F \left| T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_k) \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_k) \right| \Psi_I, t_I \right\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_k)$$

$$\times \langle \Psi_F, t_F | T\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_k) | \Psi_I, t_I \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_k)$$

$$\times \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_k) \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$$

$$= \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1)\phi(x_1) J(x_2)\phi(x_2)$$

$$\cdots J(x_k)\phi(x_k) \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$$

$$= \int \mathfrak{D}\phi \Psi_F^* \Psi_I \exp i \int d^4x \{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}$$

となる．

5. $N \equiv \int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$ とおくと，

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \exp i \int d^4x \{\mathcal{L}[x] + J(x)\phi(x)\}$$

$$= \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1)\phi(x_1) J(x_2)\phi(x_2) \cdots J(x_k)\phi(x_k) \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_k) \frac{1}{N} \int \mathfrak{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_k) \exp i \int d^4x \mathcal{L}[x]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_k J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_k) G^{(k)}[x_1, x_2, \cdots, x_k]$$

が得られる．

6. 具体形は

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

である．これを与式に代入してみれば明らか．

7. 本文参照．

8.
$$S_F(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\not{k} - m} \qquad \text{(極をずらす役割の } i\varepsilon \text{ は省略)}$$

を左辺に代入すると，

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_F(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m} \{i\gamma^\mu(-ik_\mu) - m\} e^{-ik(x-y)}$$

$$= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m} (\not{k} - m) e^{-ik(x-y)}$$

$$= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} = i\delta^4(x-y)$$

となっているので，これが解である．

第8章

1. まず，$\det(\not{p} - m)$ が Lorentz 変換に対して不変であることを示す．Lorentz 群の元 Λ

を用いると，4元ベクトル p^μ は

$$p^\mu \to p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \quad (p'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu p_\nu) \tag{a}$$

と変換する．Lorentz 変換はノルムを変えないことから，

$$p'^2 = p^2$$

が成立する．左辺を書き換えると，

$$p'^2 = p'^\mu p'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho p^\nu p_\rho$$

であり，右辺は

$$p^2 = p^\nu p_\nu$$

であるから，結局

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \delta^\rho_\nu \tag{b}$$

が成り立つ．また，Lorentz 変換により Dirac 場 (スピノール) $\psi(x)$ は

$$\psi'(x') = S\psi(x) \tag{c}$$

となるとすると，

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{d}$$

が成り立つ．これは二つの系の自由 Dirac 場の方程式

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0 \tag{e}$$

$$i\gamma^\mu \partial'_\mu \psi'(x') - m\psi'(x') = 0 \tag{f}$$

から導かれる．下の式を書き換えると，

$$iS^{-1}\gamma^\mu S \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

となる．従って，式 (e) と比較することにより，

$$S^{-1}\gamma^\mu S = \Lambda^\mu{}_\rho \gamma^\rho \quad (S^{-1}\gamma_\mu S = \Lambda_\mu{}^\rho \gamma_\rho)$$

が得られる．

以上の準備の下に $\not{p} - m$ の Lorentz 変換を計算してみると，

$$\begin{aligned}\not{p}' - m &= p'^\mu \gamma_\mu - m = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \gamma_\mu - m = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu \Lambda_\mu{}^\rho S\gamma_\rho S^{-1} - m \\ &= p^\rho S\gamma_\rho S^{-1} - m = S(\not{p} - m)S^{-1}\end{aligned}$$

となるから，その行列式は

$$\det(\not{p}' - m) = \det(\not{p} - m)$$

となり，Lorentz 変換で不変であることが示された．

従って，$\det(\not{p} - m)$ は p^2 の関数であることがわかるので，これより

$$\det(\not{p} - m) = \det(-\not{p} - m)$$

が言える．よって，

$$\begin{aligned}0 = \det(\not{p} - m) &= \{\det(\not{p} - m)\det(-\not{p} - m)\}^{1/2} \\ &= \{\det(-(p^2 - m^2))\}^{1/2} = \{(p^2 - m^2)^4\}^{1/2} \\ &= (p^2 - m^2)^2\end{aligned}$$

となるので，

$$p^2 = m^2 \quad \text{すなわち} \quad (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$$

が得られ，

$$p^0 = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$$

が導かれる．

2. 1) 式 (8 - 20)

$$\overline{u}(\boldsymbol{p}, s) 2p^\mu u(\boldsymbol{p}, s') = 2p^\mu \overline{u}(\boldsymbol{p}, s) u(\boldsymbol{p}, s') = 2p^\mu 2m\delta_{ss'}$$

一方，

$$\begin{aligned}\overline{u}(\boldsymbol{p}, s) 2p^\mu u(\boldsymbol{p}, s') &= \overline{u}(\boldsymbol{p}, s)(2g^{\mu\nu} p_\nu) u(\boldsymbol{p}, s') \\ &= \overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\{(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\nu\} u(\boldsymbol{p}, s') \\ &= \overline{u}(\boldsymbol{p}, s)(\gamma^\mu \not{p} + \not{p} \gamma^\mu) u(\boldsymbol{p}, s') \\ &= \overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu \{\not{p} u(\boldsymbol{p}, s')\} + \{\overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\not{p}\}\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s') \\ &= m\overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s') + m\overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s') \\ &= 2m\overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s')\end{aligned}$$

となるから，結局

$$2p^\mu \delta_{ss'} = \overline{u}(\boldsymbol{p}, s)\gamma^\mu u(\boldsymbol{p}, s')$$

が得られる．

第二式も同様．

2) 式 (8 - 21)

第二式を示す．

$$\begin{aligned}u^\dagger(\boldsymbol{p}, s) v(-\boldsymbol{p}, -s') &= -\frac{1}{p_0^2} u^\dagger(\boldsymbol{p}, s)(\boldsymbol{\gamma}^\dagger \cdot \boldsymbol{p} + m)\gamma^0 \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{p} + m) v(-\boldsymbol{p}, -s') \\ &= -\frac{1}{p_0^2} u^\dagger(\boldsymbol{p}, s) \begin{pmatrix} m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} & m \end{pmatrix} v(-\boldsymbol{p}, -s') \\ &= -\frac{1}{p_0^2} u^\dagger(\boldsymbol{p}, s) \begin{pmatrix} m^2 + \boldsymbol{p}^2 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{p}^2 + m^2 \end{pmatrix} v(-\boldsymbol{p}, -s') \\ &= -u^\dagger(\boldsymbol{p}, s) v(-\boldsymbol{p}, -s')\end{aligned}$$

となるので，

$$-u^\dagger(\boldsymbol{p}, s) v(-\boldsymbol{p}, -s') = 0$$

が得られる．途中 $\boldsymbol{\gamma}$ は Pauli 行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて，

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

と表示できること，および $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{p}^2$ となることを利用した．

第一式も同様．

3) 式 (8 - 22)

$u(\boldsymbol{p}, s)$ は $s = \pm 1$ の二つの独立な解を表わしている．従って，これは $\not{p} = m$ を満たす 2 次元解空間の完全系である．同様にして，$v(\boldsymbol{p}, s)$ は $\not{p} = -m$ を満たす 2 次元解空間の

完全系である．このような解空間への射影演算子 P_+, P_- は，

$$P_+ = \frac{\not{p} + m}{2m}, \quad P_- = \frac{-\not{p} + m}{2m}$$

である．事実，

$$P_+ + P_- = 1$$
$$P_+P_+ = P_+$$
$$P_-P_- = P_-$$
$$P_+P_- = 0$$

となり，射影演算子が満たすべき関係式が成り立っている．従って，式 (*8*−*18*)，(*8*−*19*) を思い起こすと，完全性の関係式

$$\sum_s u(\boldsymbol{p}, s)\overline{u}(\boldsymbol{p}, s) = \not{p} + m$$

$$\sum_s v(\boldsymbol{p}, s)\overline{v}(\boldsymbol{p}, s) = \not{p} - m$$

が得られる．

3.　まず，

$$U_{ps}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} u(\boldsymbol{p}, s)e^{-ipx}, \qquad V_{ps}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} v(\boldsymbol{p}, s)e^{ipx}$$

と定義すると，

$$b(\boldsymbol{p}, s) = (U_{ps}, \hat{\psi}) \equiv \int d^3x \overline{U}_{ps}(x)\gamma^0\hat{\psi}(x)$$

$$d^\dagger(\boldsymbol{p}, s) = (V_{ps}, \hat{\psi})$$

となる．これは $\hat{\psi}(x)$ に式 (*8*−*23*) を代入してみると直ちに示される．

このとき，$x^0 = y^0$ として

$$\begin{aligned}
&\{b^\dagger(\boldsymbol{p}, s), b(\boldsymbol{p}', s')\} \\
&= b^\dagger(\boldsymbol{p}, s)b(\boldsymbol{p}', s') + b(\boldsymbol{p}', s')b^\dagger(\boldsymbol{p}, s) \\
&= (\hat{\psi}, U_{ps})(U_{p's'}, \hat{\psi}) + (U_{p's'}, \hat{\psi})(\hat{\psi}, U_{ps}) \\
&= \int d^3x \int d^3y \{\overline{\hat{\psi}}(x)\gamma^0 U_{ps}(x)\overline{U}_{p's'}(y)\gamma^0\hat{\psi}(y) + \overline{U}_{p's'}\gamma^0\hat{\psi}(x)\overline{\hat{\psi}}(y)\gamma^0 U_{ps}(y)\} \\
&= \int d^3x \int d^3y \{\hat{\psi}^\dagger(x)U_{ps}(x)U^\dagger_{p's'}(y)\hat{\psi}(y) + U^\dagger_{p's'}(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(y)U_{ps}(y)\} \\
&= \int d^3x \int d^3y \{\hat{\psi}^{\dagger a}(x)U_{psa}(x)U^{\dagger b}_{p's'}(y)\hat{\psi}_b(y) + U^{\dagger b}_{p's'}(y)\hat{\psi}_b(y)\hat{\psi}^{\dagger a}(x)U_{psa}(x)\} \\
&= \int d^3x \int d^3y U^{\dagger b}_{p's'}(y)\{\hat{\psi}^{\dagger a}(x)\hat{\psi}_b(y) + \hat{\psi}_b(y)\hat{\psi}^{\dagger a}(x)\}_{x^0=y^0} U_{psa}(x) \\
&= \int d^3x \int d^3y U^{\dagger b}_{p's'}(y)\delta^a_b\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})U_{psa}(x)
\end{aligned}$$

$$= \int d^3x \int d^3y \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) U^\dagger_{p's'}(y) U_{ps}(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3y \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \frac{1}{\sqrt{2p_0 2p'_0}} u^\dagger(\boldsymbol{p}', s') u(\boldsymbol{p}, s) e^{ip'y} e^{-ipx}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \frac{1}{\sqrt{2p_0 2p'_0}} u^\dagger(\boldsymbol{p}', s') u(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{s}) e^{i(p'_0 y^0 - p_0 x^0)} e^{-i(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{x}}$$

$$= \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \frac{1}{2p_0} u^\dagger(\boldsymbol{p}, s') u(\boldsymbol{p}, s) e^{ip_0(y^0 - x^0)}$$

$$= \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}') \frac{1}{2p_0} 2p_0 \delta_{ss'} = \delta_{ss'} \delta^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$$

となり、式 (8-24) が示された．$d(\boldsymbol{p}, s)$ の関係式も同様．

4.　被積分関数の分母を因数分解すると，

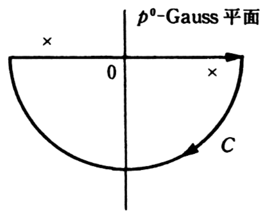
$$p^2 - m^2 + i\varepsilon = (p^0 - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - i\varepsilon})(p^0 + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - i\varepsilon})$$

となるから，被積分関数は

$$p^0 = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - i\varepsilon} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} - i\varepsilon'$$

$$p^0 = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2 - i\varepsilon} = -\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} + i\varepsilon'$$

に 1 位の極を有する．そこで $\pm i\varepsilon'$ は極を積分路からずらす役割をしていることがわかる．



さて，仮に $x^0 > y^0$ とすると，因子 $e^{-ip^0(x^0-y^0)}$ は p^0－Gauss 平面の下半面で小さくなるので，上図のように無限大の半円を積分路に加えても値は変わらないはずである．そして，この積分路 C の中には極 $\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} - i\varepsilon'$ のみが含まれている．よって留数定理により，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon' \to 0} \oint_C dp^0 \frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^0 - \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} + i\varepsilon')(p^0 + \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} - i\varepsilon')}$$

$$\equiv \lim_{\varepsilon' \to 0} \oint_C dp^0 f(p^0)$$

$$= -2\pi i \lim_{\varepsilon' \to 0} \mathrm{Res} f(\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2} - i\varepsilon')$$

$$= -2\pi i \lim_{\epsilon' \to 0} \lim_{p^0 \to \sqrt{p^2+m^2}-i\epsilon'} (p^0 - \sqrt{p^2+m^2} + i\epsilon') f(p^0)$$

$$= -2\pi i \lim_{\epsilon' \to 0} \lim_{p^0 \to \sqrt{p^2+m^2}-i\epsilon'} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^0 + \sqrt{p^2+m^2} - i\epsilon'}$$

$$= -2\pi i \left. \frac{1}{2p^0} e^{-ip(x-y)} \right|_{p^0=\sqrt{p^2+m^2}}$$

$$= -\left. \frac{i\pi}{p^0} e^{-ip(x-y)} \right|_{p^0=\sqrt{p^2+m^2}}$$

が得られる．

$x^0 < y^0$ と仮定しても同様である．

5. $\dot{\phi}_2(x) = \{\phi_2(x), \tilde{H}\}_P = 0$

となっていれば更なる拘束条件は現われない．$\{\phi_2(x), \tilde{H}\}_P = 0$ は次のようにして示される．まず，正準変数間の Poisson 括弧を用いて

$$\left\{\phi_2(x), \tilde{H}\right\}_P = \left\{\partial_k \pi^k(x), H + \int d^3y \lambda(y) \pi^0(y)\right\}_P = \{\partial_k \pi^k(x), H\}_P$$

$$= \left\{\partial_k \pi^k(x), \int d^3y \left(-\frac{1}{2}\pi_l(y)\pi^l(y) - A_0 \partial_{y^l} \pi^l(y) + \frac{1}{4} F_{nl}(y) F^{nl}(y)\right)\right\}_P$$

$$= \left\{\partial_k \pi^k(x), \frac{1}{4}\int d^3y F_{nl}(y) F^{nl}(y)\right\}_P = \partial_k \frac{1}{4} \int d^3y \{\pi^k(x), F_{nl}(y) F^{nl}(y)\}_P$$

となる．ここで，

$$\int d^3y \{\pi^k(x), F_{nl}(y) F^{nl}(y)\}_P$$

$$= \int d^3y \left(\{\pi^k(x), F_{nl}(y)\}_P F^{nl}(y) + F_{nl}(y) \{\pi^k(x), F^{nl}(y)\}_P\right)$$

$$= \int d^3y \left(\{\pi^k(x), \partial_{y^n} A_l(y) - \partial_{y^l} A_n(y)\}_P F^{nl}(y) \right.$$
$$\left. + F^{nl}(y) \{\pi^k(x), \partial_{y^n} A_l(y) - \partial_{y^l} A_n(y)\}_P\right)$$

$$= -\int d^3y \left(\{\pi^k(x), A_l(y)\}_P \partial_{y^n} F^{nl}(y) - \{\pi^k(x), A_n(y)\}_P \partial_{y^l} F^{nl}(y) \right.$$
$$\left. + \partial_{y^n} F^{nl}(y) \{\pi^k(x), A_l(y)\}_P - \partial_{y^l} F^{nl}(y) \{\pi^k(x), A_n(y)\}_P\right)$$

$$= \partial_n F^{nk}(x) - \partial_l F^{kl}(x) + \partial_n F^{nk}(x) - \partial_l F^{kl}(y)$$

$$= 4\partial_n F^{nk}(x)$$

が得られるから，

$$\{\phi_2(x), \tilde{H}\}_P = \partial_k\partial_n F^{nk}(x) = -\partial_k\partial_n F^{nk}(x) = 0$$

となる．但し，$F^{nk}(x) = -F^{kn}(x)$ を利用した．

6.

$$\begin{aligned}
\{A_{Tk}(x), {\pi_T}^l(y)\}_P &= \{(\delta_k^s - \partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m)A_s(x), (\delta_t^l - \partial_{y^t}\partial_{y_l}/\partial_{y^m}\partial_{y_m})\pi^t(y)\}_P \\
&= \{A_k(x) - \partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m A_s(x), \pi^l(y) - \partial_{y^l}\partial_{y_l}/\partial_{y^m}\partial_{y_m}\pi^t(y)\}_P \\
&= \{A_k(x), \pi^l(y)\}_P - \partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m\{A_s(x), \pi^l(y)\}_P \\
&\qquad -\partial_{y^t}\partial_{y_l}/\partial_{y^m}\partial_{y_m}\{A_k(x), \pi^t(y)\}_P \\
&\qquad +\partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m \cdot \partial_{y^t}\partial_{y_l}/\partial_{y^n}\partial_{y_n}\{A_s(x), \pi^t(y)\}_P \\
&= \delta_k^l\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m\delta_s^l\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \partial_{y^t}\partial_{y_l}/\partial_{y^m}\partial_{y_m}\delta_k^t\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\qquad +\partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m \cdot \partial_{y^t}\partial_{y_l}/\partial_{y^n}\partial_{y_n}\delta_s^t\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \delta_k^l\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\qquad +\partial_k\partial^s/\partial_m\partial^m \cdot \partial_s\partial^l/\partial_n\partial^n\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \delta_k^l\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - 2\partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \partial_k\partial^s\partial_s\partial^l/\partial_m\partial^m\partial_n\partial^n\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \delta_k^l\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - 2\partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= \delta_k^l\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= (\delta_k^l - \partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

すなわち

$$\{A_{Tk}(x), \pi_T^l(y)\}_P = (\delta_k^l - \partial_k\partial^l/\partial_m\partial^m)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

となる．

7. 式 (8−48) から式 (8−44) が導けることを示す．まず，

$$\hat{A}_{Tk}(x) = \sum_i \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2q_0}}\{a^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{-iqx} + a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q})\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})e^{iqx}\}$$

より，式 (8−50) を用いると

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}_T^l(y) = -\dot{\hat{A}}_T^l(y) = \sum_j \int &\frac{d^3q'}{\sqrt{(2\pi)^3 2q'_0}} \\
&\cdot\{iq'_0 a^{(j)}(\boldsymbol{q}')\varepsilon^{(j)l}(\boldsymbol{q}')e^{-iq'y} - iq'_0 a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}')\varepsilon^{(j)l}(\boldsymbol{q}')e^{iq'y}\}
\end{aligned}$$

となるから，$x^0 = y^0$ として

$$\begin{aligned}
&[\hat{A}_{Tk}(x), \hat{\pi}_T^l(y)] \\
&= \sum_{i,j}\int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2q_0}}\frac{d^3q'}{\sqrt{(2\pi)^3 2q'_0}} \\
&\qquad \cdot\{-iq'_0\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon^{(j)l}(\boldsymbol{q}')[a^{(i)}(\boldsymbol{q}), a^{(j)\dagger}(\boldsymbol{q}')]e^{-iqx+iq'y} \\
&\qquad\qquad +iq'_0\varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q})\varepsilon^{(j)l}(\boldsymbol{q}')[a^{(i)\dagger}(\boldsymbol{q}), a^{(j)}(\boldsymbol{q}')]e^{iqx-iq'y}\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_i \int \frac{d^3q}{\sqrt{(2\pi)^3 2q_0}} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2q_0}} \{-iq_0 \varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q}) \varepsilon^{(i)l}(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$$
$$-iq_0 \varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q}) \varepsilon^{(i)l}(\boldsymbol{q}) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\}$$
$$= -i \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} \left\{ q_0 \sum_i \varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q}) \varepsilon^{(i)l}(\boldsymbol{q}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \right.$$
$$\left. + q_0 \sum_i \varepsilon_k^{(i)}(\boldsymbol{q}) \varepsilon^{(i)l}(\boldsymbol{q}) e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} \right\}$$
$$= -i \int \frac{d^3q}{2(2\pi)^3} \left(-\delta_k^l + \frac{q_k q^l}{-\boldsymbol{q}^2} \right) \{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\}$$
$$= -i \int \frac{d^3q}{2(2\pi)^3} (-\delta_k^l - \partial_k \partial^l / (-\partial_m \partial^m)) \{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\}$$
$$= i(\delta_k^l - \partial_k \partial^l / \partial_m \partial^m) \int \frac{d^3q}{2(2\pi)^3} \{e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\}$$
$$= i(\delta_k^l - \partial_k \partial^l / \partial_m \partial^m) \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

すなわち

$$[\hat{A}_{Tk}(x), \hat{\pi}_T^l(y)] = i(\delta_k^l - \partial_k \partial^l / \partial_m \partial^m) \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

となる．

8. まず，1 次元の δ 関数の公式

$$\delta(p) = \int \frac{dq}{2\pi} e^{ipq}$$

より，n 次元のときは

$$\prod_{j=1}^n \delta(p_j) = \int \left(\prod_{j=1}^n \frac{dq^j}{2\pi} \right) e^{i\sum_{k=1}^n p_k q^k}$$

となることがわかる．これを無限次元である場の量に拡張する．

$$q^j \to \varphi(x^j)\sqrt{\Delta^4 x}$$
$$p_j \to \partial_l \pi^l(x^j)\sqrt{\Delta^4 x}$$

とすると，

$$\prod_{x^j} \delta(\partial_l \pi^l(x^j)\sqrt{\Delta^4 x}) = \int \left(\prod_{x^j} \frac{d\varphi(x^j)\sqrt{\Delta^4 x}}{2\pi} \right) e^{i\sum_{x^k} \varphi(x^k)\partial_l \pi^l(x^k)\Delta^4 x}$$

すなわち

$$\prod_{x^j} \delta(\partial_l \pi^l(x^j)) = \int \left(\prod_{x^j} \frac{d\varphi(x^j)\Delta^4 x}{2\pi} \right) e^{i\sum_{x^k} \varphi(x^k)\partial_l \pi^l(x^k)\Delta^4 x}$$

が成り立つ．更に $\Delta x \to 0$ として連続量に書き換えると，結局

$$\prod_x \delta(\partial_l \pi^l(x)) = \int \mathfrak{D}\varphi \exp i \int d^4x \varphi(x) \partial_l \pi^l(x)$$

が得られる．

第 9 章

1.

$$\left\{ g^{\mu\rho}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial^\mu \partial^\rho \right\} D_{F\mu\nu}(x-y)$$

$$= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \left\{ g^{\mu\rho}\Box + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \partial^\mu \partial^\rho \right\} \frac{-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2} e^{-ik(x-y)}$$

$$= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \left\{ -g^{\mu\rho}k^2 - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) k^\mu k^\rho \right\} \frac{-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2} e^{-ik(x-y)}$$

$$= \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \left\{ \delta^\rho_\nu - (1-\xi)\frac{k^\rho k_\nu}{k^2} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \frac{k_\nu k^\rho}{k^2} - \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)(1-\xi)\frac{k^\rho k^\nu}{k^2} \right\} e^{-ik(x-y)}$$

$$= i\delta^\rho_\nu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} = i\delta^\rho_\nu \delta^4(x-y)$$

となっている．

2. $S_F(x-y) = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-y)}}{\not{k} - m} = \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} e^{-ik(x-y)}$ より，

$$S_F^\dagger(x-y)\gamma^0 = -\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}^\dagger + m}{k^2 - m^2} e^{ik(x-y)} \gamma^0$$

$$= -\int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}^\dagger + m}{k^2 - m^2} \gamma^0 e^{ik(x-y)}$$

$$= -\gamma^0 \int \frac{id^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} e^{-ik(y-x)}$$

$$= -\gamma^0 S_F(y-x)$$

となっている．

3. $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) S_F(x-y) = i\delta^4(x-y)$ の Hermite 共役をとり，その後両辺の左右から γ^0 をかけると

$$-\partial_\mu \gamma^0 S_F^\dagger(x-y) i\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 - m\gamma^0 S_F^\dagger(x-y)\gamma^0 = -i\delta^4(x-y)$$

となる．2. の結果を利用して

$$\partial_\mu S_F(y-x) i\gamma^\mu + m S_F(y-x) = -i\delta^4(x-y)$$

すなわち

$$\partial_{y^\mu} S_F(y-x) i\gamma^\mu - m S_F(y-x) = i\delta^4(x-y)$$

が得られる.

4. 式 (9-41) より，式 (9-28),(9-29) を用いると

$$G_2^{(4)}[x_1,x_2;x_3,x_4]|_{e^-e^-\text{散乱}}$$

$$= \int d^4y_1 d^4y_2 S_F(x_1-y_1)(ie\gamma^\mu)S_F(y_1-x_2)D_{F\mu\nu}(y_1-y_2)$$

$$\times S_F(x_3-y_2)(ie\gamma^\nu)S_F(y_2-x_4)$$

となる．Fourier 変換すると

$$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)G_2^{(4)}[p_1,p_2;p_3,p_4]|_{e^-e^-\text{散乱}}$$

$$= \int d^4x_1\cdots d^4x_4 e^{i(p_1x_1+\cdots+p_4x_4)}$$

$$\times \int d^4y_1 d^4y_2 S_F(x_1-y_1)(ie\gamma^\mu)S_F(y_1-x_2)D_{F\mu\nu}(y_1-y_2)$$

$$\times S_F(x_3-y_2)(ie\gamma^\nu)S_F(y_2-x_4)$$

$$= \int d^4x_1\cdots d^4x_4 \int d^4y_1 d^4y_2$$

$$\cdot \int \frac{id^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_a}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{id^4k_4}{(2\pi)^4} S_F(k_1)(ie\gamma^\mu)S_F(k_2)$$

$$\times D_{F\mu\nu}(k_a)S_F(k_3)(ie\gamma^\nu)S_F(k_4)e^{i(p_1-k_1)x_1}e^{i(p_2+k_2)x_2}$$

$$\times e^{i(p_3-k_3)x_3}e^{i(p4+k_4)x_4}e^{i(k_1-k_2-k_a)y_1}e^{i(k_a+k_3-k_4)y_2}$$

$$= \int \frac{id^4k_a}{(2\pi)^4} iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_2)D_{F\mu\nu}(k_a)iS_F(p_3)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_4)$$

$$\times (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_a)(2\pi)^4\delta^4(k_a+p_3+p_4)$$

$$= iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_2)D_{F\mu\nu}(p_1+p_2)iS_F(p_3)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_4)$$

$$\times i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4)$$

となるので，直ちに

$$G_2^{(4)}[p_1,p_2;p_3,p_4]\Big|_{e^-e^-\text{散乱}}$$

$$= iS_F(p_1)(ie\gamma^\mu)iS_F(-p_2)D_{F\mu\nu}(p_1+p_2)iS_F(p_3)(ie\gamma^\nu)iS_F(-p_4)$$

が得られる.

第 10 章

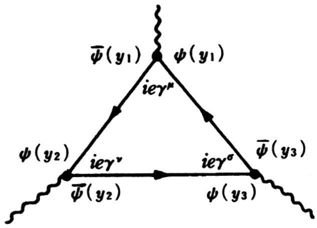
1. 次図より，Green 関数の被積分関数に

$$\langle\overline{\psi}(y_3)(ie\gamma^\sigma)\psi(y_3)\cdot\overline{\psi}(y_2)(ie\gamma^\nu)\psi(y_2)\cdot\overline{\psi}(y_1)(ie\gamma^\mu)\psi(y_1)\rangle_{\rm con}$$

という項が現われるが，これの荷電共役変換をとってみると，

$$(-ie^3)C\langle\overline{\psi}(y_3)\gamma^\sigma\psi(y_3)\cdot\overline{\psi}(y_2)\gamma^\nu\psi(y_2)\cdot\overline{\psi}(y_1)\gamma^\mu\psi(y_1)\rangle_{\rm con}C^{-1}$$

$$= (-ie^3)\langle\overline{\psi^c}(y_3)\gamma^\sigma\psi^c(y_3)\cdot\overline{\psi^c}(y_2)\gamma^\nu\psi^c(y_2)\cdot\overline{\psi^c}(y_1)\gamma^\mu\psi^c(y_1)\rangle_{\rm con}$$



$$= -(-ie^3)\langle\overline{\psi}(y_3)\gamma^\sigma\psi(y_3)\cdot\overline{\psi}(y_2)\gamma^\nu\psi(y_2)\cdot\overline{\psi}(y_1)\gamma^\mu\psi(y_1)\rangle_{\text{con}}$$

となり、負号がつく．従ってこのようなダイアグラムは荷電共役奇である．量子電磁力学はその Lagrangian の形から荷電共役変換不変である．よって，$b_e=3, f_e=0$ のダイアグラムは禁じられている．

注）$\overline{\psi^c}\gamma^\mu\psi^c = \psi^t\gamma^0C^{-1}\gamma^0\gamma^\mu C(\overline{\psi})^t = -\psi^t C^{-1}\gamma^\mu C(\overline{\psi})^t$

$$= \psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger(\overline{\psi})^\dagger = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

最後の負号はψが Grassmann 数の場であることから生じたものである．

2.
$$D_{F\nu\sigma}(p) = \frac{-g_{\nu\sigma}+(1-\xi)\frac{p_\nu p_\sigma}{p^2}}{p^2}$$

であるから，

$$\left\{-(g^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu)-\frac{1}{\xi}p^\mu p^\nu\right\}D_{F\nu\sigma}(p)$$

$$= -(g^{\mu\nu}p^2-p^\mu p^\nu)\frac{-g_{\nu\sigma}+(1-\xi)\frac{p_\nu p_\sigma}{p^2}}{p^2} - \frac{1}{\xi}p^\mu p^\nu\frac{-g_{\nu\sigma}+(1-\xi)\frac{p_\nu p_\sigma}{p^2}}{p^2}$$

$$= \delta^\mu_\sigma - (1-\xi)\frac{p^\mu p_\sigma}{p^2} - \frac{p^\mu p_\sigma}{p^2} + (1-\xi)\frac{p^\mu p_\sigma}{p^2}$$

$$+\frac{1}{\xi}\frac{p^\mu p_\sigma}{p^2} - \left(\frac{1}{\xi}-1\right)\frac{p^\mu p_\sigma}{p^2} = \delta^\mu_\sigma$$

となり，示された．

3. 式 (10-92) を $A_\nu(x_3), A_\rho(x_2), A_\sigma(x_1)$ で変分した後，$A_0=\overline{\psi_0}=\psi_0=0$ とおくと

$$\partial_\mu\Gamma^{(4)\mu\nu\rho\sigma}[x_1,x_2,x_3,x]=0$$

が得られる．これを Fourier 変換すると，

$$p_\mu\Gamma^{(4)\mu\nu\rho\sigma}[p_1,p_2,p_3,p]=0$$

となる．従って，$\Gamma^{(4)\mu\nu\rho\sigma}[p_1,p_2,p_3,p]$ からは必ず運動量がくくり出されているはずである．そうすると残りの部分は質量次元が下がる．よって，$d<0$ となり，発散しない．

4.
$$\Gamma_r^{(3)\mu}[p_1,p_2,p_3;e_r,m_r,\xi_r;\mu] = Z_2Z_3^{1/2}\Gamma^{(3)\mu}[p_1,p_2,p_3;e,m,\xi]$$

より，本文で述べたのと同様にして，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial e_r}-m_r\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_r}+\gamma_\xi\frac{\partial}{\partial\xi_r}-\gamma_A-2\gamma_\psi\right)$$

$$\cdot\Gamma_r^{(3)\mu}[p_1, p_2, p_3; e_r, m_r, \xi_r; \mu] = 0$$

となる．但し，

$$\gamma_\psi \equiv \frac{1}{2}\frac{\mu}{Z_2}\frac{dZ_2}{d\mu}$$

である．また，その解は

$$\Gamma_r^{(3)\mu}[p_1, p_2, p_3; e_r, m_r, \xi_r; \mu]$$
$$= e^{-\int_0^t dt'(\gamma_A(t')+2\gamma_\psi(t'))}\Gamma_r^{(3)\mu}[p_1, p_2, p_3; \bar{e}_r(t), e^t\overline{m}_r(t), \bar{\xi}_r(t); e^t\mu]$$

となる．

参考文献

1. 藤田宏：関数解析，岩波書店 (1995).
2. J. フォン ノイマン著，井上健他訳：量子力学の数学的基礎，みすず書房 (1978).
3. 岡本良夫：逆問題とその解き方，オーム社 (1992).
4. 伊藤正男：線形代数 I，岩波書店 (1993).
5. 木村利栄，菅野礼司：微分形式による解析力学，マグロウヒル (1988).
6. 九後汰一郎：ゲージ場の量子論 I，II，培風館 (1989).
7. 藤川和男：ゲージ場の理論，岩波書店 (1993).
8. 崎田文二，吉川圭二：径路積分による多自由度の量子力学，岩波書店 (1986).
9. R. P. ファインマン，A. R. ヒッブス著，北原和夫訳：ファインマン経路積分と量子力学，マグロウヒル (1990).
10. L. S. シュルマン著，高塚和夫訳：ファインマン経路積分，講談社サイエンティフィク (1995).
11. M. S. スワンソン著，青山秀明，川村浩之，和田信也訳：経路積分法，吉岡書店 (1996)
12. 内山龍雄：一般ゲージ場論序説，岩波書店 (1987).
13. 藤井保憲：超重力理論入門，マグロウヒル (1987).
14. 江沢洋，渡辺敬二，鈴木増雄，田崎晴明：くりこみ群の方法，岩波書店 (1994).
15. F. ハルツェン，A. D. マーチン著，小林澈郎，広瀬立成訳：クォークとレプトン，培風館 (1986).
16. 坂井典佑：素粒子物理学，培風館 (1993).
17. 関根松夫：量子電磁気学，コロナ社 (1997).

索　引

サ

タ

著　者　略　歴

杉田　勝実（すぎた・かつみ）

1982年　東京工業大学大学院修士課程修了

現　在　サンテクノカレッジ副校長

岡本　良夫（おかもと・よしを）

1982年　東京工業大学大学院博士課程修了（工学博士）

現　在　千葉工業大学教授

関根　松夫（せきね・まつお）

1970年　東京工業大学大学院博士課程修了（理学博士）

現　在　東京工業大学助教授

1998年10月6日　第1版第1刷発行　

著　　者　杉田勝実・岡本良夫・関根松夫

発 行 者　森北　肇

発 行 所　森北出版株式会社

東京都千代田区富士見 1-4-11（〒102-0071）

電話 03-3265-8341/FAX 03-3264-8709

http://www.morikita.co.jp/

自然科学書協会・工学書協会　会員

　印刷/東京書籍印刷・製本/協栄製本

Printed in Japan ／ ISBN 4-627-78271-3

経路積分と量子電磁力学　[POD版]

2005年12月1日　発行

編集代表　杉田　勝実・岡本　良夫・関根　松夫

発行者　森北　肇

発　行　森北出版株式会社
〒102-0071
東京都千代田区富士見1-4-11
TEL　03-3265-8341　FAX　03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/

印刷・製本　ブッキング
〒101-0062
東京都千代田区神田駿河台2-8

ISBN4-627-78279-9　Printed in Japan